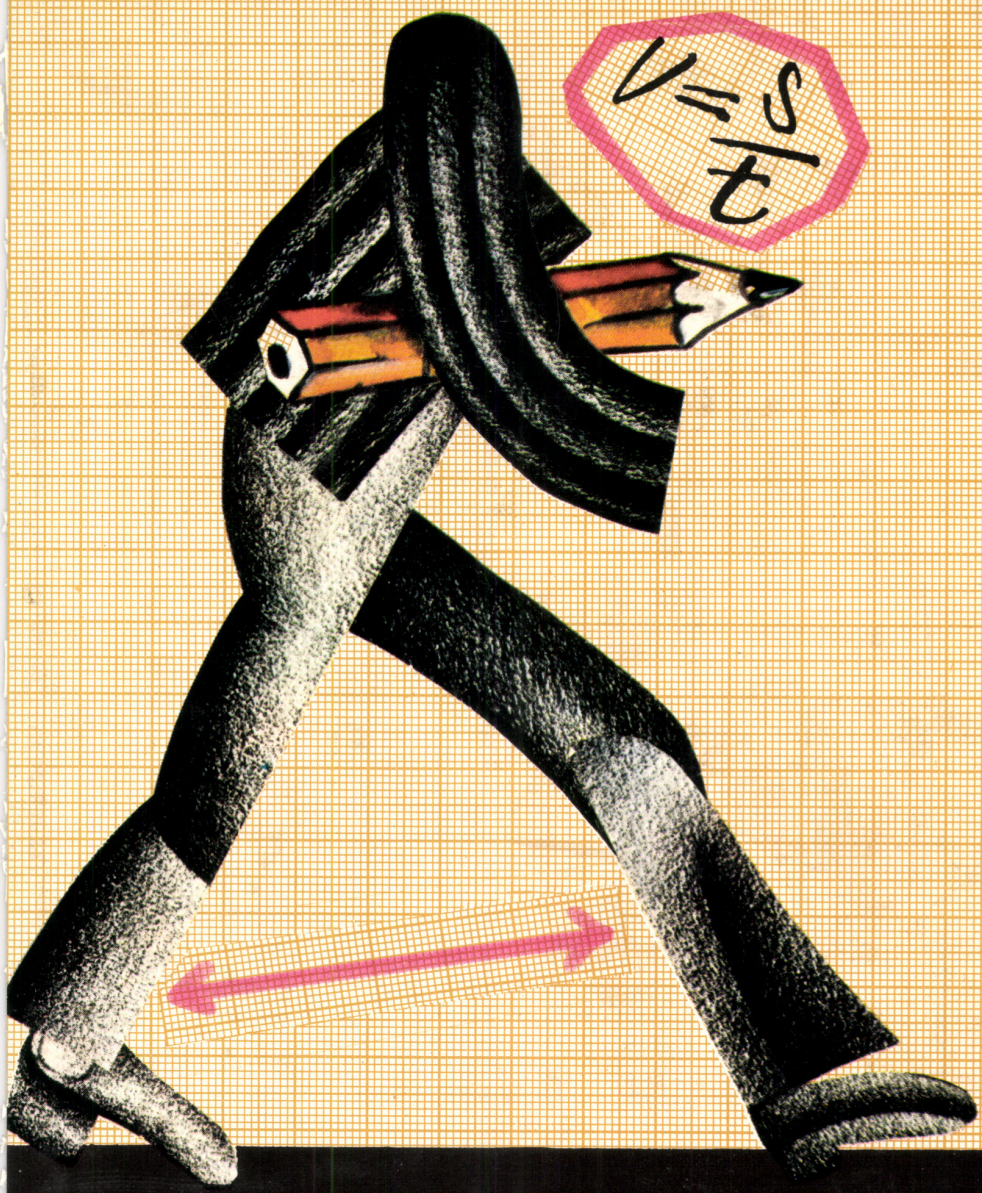
L. V. Tarasov – A. N. Tarasova



Fizikai kérdések és feladatok

L. V. TARASZOV – A. N. TARASZOVA

FIZIKAI KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

Aki belelapoz majd e könyvbe, először feltehetően ezt kérdezi magában: vajon komolyan gondolták-e a szerzők, hogy az egymást követő negyvenhárom rövid beszélgetés bármelyike valaha is színpadra kerüljön? A válasz nyilvánvalóan nem. De a gyakorta egymás szavába vágó szereplők mondatainak dramaturgiai elkülönítése ennek ellenére sem csupán formai játék. Mégis csak arra készteti az olvasót, hogy képzeletében megjelenítsen egy-egy izzóbb hangvételű beszélgetést, hogy egy kissé rendezővé váljék. És a rendezés akkor sikerül majd jól, ha megérti a vitatkozó partnerek indítékait, vagyis a szóba kerülő fizikai gondolatokat. A párbeszédes forma éppen azért tanulságos, mert korántsem a törvények és alkalmazásaik tételes felsorolásán van a hangsúly, hanem azokon az értelmezési, szemléleti kérdéseken, amelyek fontosságának a legtöbbször csak akkor vagyunk tudatában, ha a modern fizika interpretációs kérdései vetődnek fel. Pedig szerepük a legegyszerűbb feladatok megoldásában is alapvető. Ha egyáltalában létezik külön fizikusi gondolkozás, ez éppen a külön fizikai szemléletnek köszönhető. A párbeszédekben szereplő tanár ezt a szemléletet igyekszik a néha balga,

KIVEZETVE:
2020.07.23.

L. V. Taraszov – A. N. Taraszova

FIZIKAI KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

L. V. Taraszov – A. N. Taraszova

FIZIKAI KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

Gondolat · Budapest 1978
MIR Könyvkiadó · Moszkva

A mű eredeti címe:
Тарасов Л. В., Тарасова А. Н.:
ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ
Москва, «Высшая школа», 1975.

Második, átdolgozott, bővített kiadás

Fordította:
dr. Solymosi József

Szakmailag ellenőrizte és az
eredetivel egybevetette:
dr. Károlyi Gyula

T. T. Könyvtára, Budapest
Helyszám: 31.538
Leltári szám: 44.648

ISBN 963 280 534 8

© Высшая Школа Kiadó, 1975.
© *Hungarian translation* dr. Solymosi József, 1978

TARTALOM

Az első kiadás előszavából 7
Előszó a második kiadáshoz 9
1. Ismerik az egyenesvonalú mozgás kinematikájának grafikus elemzési módszerét? 11
2. Fel tudják-e rajzolni a testre ható erőket? 17
3. Ki tudják-e számolni a súrlódási erőt? 26
4. Jól ismerik Newton törvényeit? 31
5. Nézzünk néhány kinematikai példát! 42
6. Nézzünk néhány dinamikai példát! 52
7. Mennyire nehezíti meg a dinamikai feladatok megoldását a súrlódás figyelembevétele? 58
8. Létezik-e centrifugális erő? 64
9. Hogyan értelmezzük a súlytalanság állapotát? 79
10. Tudnak-e bánni az energia- és impulzusmegmaradás törvényeivel? 85
11. Ismerik-e a harmonikus rezgések törvényszerűségeit? 105
12. Mi történik az ingával a súlytalanság állapotában? 114
13. Mit tudnak a hullámokról? 120
14. Járatosak-e az erők felbontásában? 129
15. Mit tudnak a testek egyensúlyi helyzetéről? 135
16. Hogyan számítjuk ki egy test súlypontjának helyét? 142
17. Tudják Arkhimédész törvényét? 148
18. Érvényes-e Arkhimédész törvénye az űrhajóban? 155
19. Mit tudnak az anyag kinetikus elméletéről? 158
20. Mivel magyarázható a víz hőtágulásakor tapasztalható különleges viselkedése? 168
21. Tudják, mi az az ideális gáz? 170
22. Milyen gáztörvényeket ismernek? 175
23. Hogyan oldjunk meg példákat a gáztörvényekkel? 185

24. Mi a termodinamika? 197
25. Mi a Carnot-ciklus? 204
26. Mennyi a gázok fajhője? 207
27. Beszélgessünk a terekről! 209
28. Hogyan jellemezhető az elektrosztatikus tér? 214
29. Hogyan viselkednek az erővonalak az elektromos vezető felülete környezetében? 225
30. Hogyan értelmezik a homogén elektrosztatikus térben történő elmozdulást? 229
31. Tudnak-e bánni a Coulomb-törvénnyel? 240
32. Ismerik jól Ohm-törvényét? 248
33. Bekapcsolható-e a kondenzátor az egyenáramú áramkörökbe? 257
34. Ki tudják-e számítani az elágazó áramkörök ellenállását? 262
35. Miért ég ki a villanyégő? 269
36. Hogyan jellemezhető a mágneses tér? 276
37. Mit tudnak az áram erőhatásáról? 282
38. Jól értik Faraday és Lenz törvényét? 287
39. Ismeretes az önindukció és az induktivitás fogalma? 291
40. Ismerik-e a fénytörés és fényvisszaverődés törvényszerűségeit? 294
41. Gyakoroljuk a képszerkesztést! 301
42. Rendszerezzük az optikai feladatokat! 310
43. A megmaradási törvények alapján próbáljunk egy kicsit szabadabban gondolkodni! 317
A feladatok megoldása 332

AZ ELSŐ KIADÁS ELŐSZAVÁBÓL

Ezt a könyvet segédkönyvnek szántuk az egyetemi felvételi vizsgára készülők számára. A könyv formája sajátos párbeszéd. Ezt a tárgyalásmódot igen alkalmasnak tartjuk a felvételi vizsgázók jellegzetes hibáinak elemzésére, az egyes feladatok különféle megoldási lehetőségeinek megmutatására és a nehezebben érthető elméleti kérdések megközelítésére. A könyv igen sok kérdést és feladatot ismertet részletesen, ugyanakkor az olvasó önálló feladatokat is kap, amelyek megoldását a könyv végén ellenőrizheti.

A hibák elemzése mindig tanulságos, mert közben fel lehet hívni a figyelmet a vizsgált probléma bármely jellemző vonására, felszínre hozhatók azok az apró hiányosságok, amelyek a hiba elkövetéséhez vezettek, mindez pedig végeredményben mélyebb értelmezést eredményez. A hibaelemzés azonban egyúttal nehéz is, hiszen míg a helyes megoldás csupán egyféle eredményt szolgáltat, hibázni számtalan módon lehet. Elvileg szinte lehetetlen felsorolni az egy adott kérdésre adható összes helytelen választ, és ezek közül igen sok örök titok marad, ha a vizsgázó hallgatásba burkolózik. Ennek ellenére a kérdések egy meghatározott csoportjához eleve hozzárendelhetők olyan típusú helytelen válaszok, amelyekkel szinte állandó jelleggel találkozhatunk, és találunk olyan kérdéseket is, amelyekre a jelöltek rendszerint helytelenül válaszolnak. Ilyen anyag szolgált könyvünk forrásául.

Előrebocsátjuk, hogy ez a könyv egyáltalán nem tankönyv, mivel nem tartalmazza rendszerezve a teljes középiskolás fizikaanyagot. Inkább tekinthető sajátos témájú, mégis kötetlen beszélgetésnek. Azoknak, akik most kezdik tanulni a fizikát, ezt a könyvet csak későbbi olvasmányként ajánlhatjuk. A könyv azokhoz szól, akik a felvételi vizsga kapujában mélyíteni kívánják fizikatudásukat és szemléletüket.

Feltesszük tehát, hogy könyvünk olvasója elvégezte a középiskolát, egészében véve ismeri a középiskolás fizikaanyagot, emlékszik a legfon-

tosabb összefüggésekre, ismeri a törvényszerűségeket és a mértékegységeket. Ő maga abban az átmeneti állapotban van, amikor már nem diák, de még nem is egyetemista, azonban kifejezett szándéka, hogy azzá váljék. És ha ennek érdekében alaposabbá kívánja tenni fizikatudását, akkor örömmel javasoljuk neki e könyvet.

Reméljük, hogy könyvünk segít az olvasónak megérteni egy triviális igazságot, nevezetesen, hogy a tankönyv egyszerű bemagolása – legyen az akár a legjobb tankönyv – nemcsak fárasztó, hanem egyben a legkevésbé gyümölcsöző eljárás is. Az embernek arra kell törekednie, hogy gondolkodni tanuljon meg, nem pedig az anyag puszta memorizálására. És ha könyvünk csupán kis mértékben is, de segítséget nyújt e vonatkozásban, akkor úgy érezzük, hogy teljesíteni tudtuk feladatunkat.

ELŐSZÓ A MÁSODIK KIADÁSHOZ

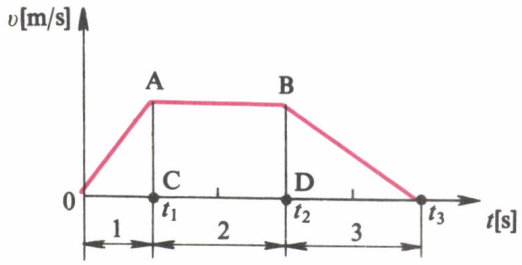
A szerzők köszönetüket fejezik ki mindazon olvasójuknak, akik szíveskedtek megküldeni a könyv javítását célzó észrevételeiket és javaslataikat, amelyeket a szerzők a második kiadásnál már figyelembe vettek. Ebben a kiadásban helyesbítették a stilisztikai pontatlanságokat, megváltoztatták a félreérthető megfogalmazásokat, illetve kijavították az észlelt sajtóhibákat. Egyes fejezetek (a súlytalanság, az impulzus megmaradása, az ingamozgás, Arkhimédész törvénye, az ideális gáztörvények, az elektrosztatikus tér stb.) értelmező magyarázata kibővült. Új fejezetek is helyet kaptak e kiadásban, amelyek a hullámok, a termodinamika, a mágneses tér, az áram erőhatása, az elektromágneses indukció kérdésével foglalkoznak, illetve a könyv végén egy összefoglaló beszélgetés a megmaradási törvények jelentőségéről és a fizikában betöltött fundamentális szerepéről. A könyv anyagának összeállítása során a szerzők az egyetemi felvételi vizsgák fizikaanyagából indultak ki, azonban némely esetben célszerűnek látszott ezt a keretet túllépni (így pl. a könyv tartalmazza a vektorok szorzatának magyarázatát, a Dopplereffektus és a Cserenkov-effektus leírását, valamint az impulzusmomentum megmaradási elvét stb.) annak érdekében, hogy az olvasó megismerje ezeknek a kérdéseknek a mélyebb értelmezését. Az első kiadás illusztrációs anyaga is kibővült és minőségileg javult. Jelentősen megnöveltük az önálló megoldásra szánt feladatok számát és ezzel együtt — az önkontroll megkönnyítése érdekében — a megoldásokat legtöbb esetben először általános alakban ismertetjük, majd megadjuk a számszerű megoldást. A szerzőktől távol áll az a gondolat, hogy könyvük már minden hiányosságtól mentes és tökéletes alkotás. Ezért a továbbiakban is hálás köszönettel fogadják olvasóink minden egyes, a könyvvel kapcsolatos észrevételét.

A szerzők

1. ISMERIK AZ EGYENESVONALÚ MOZGÁS KINEMATIKÁJÁNAK GRAFIKUS ELEMZÉSI MÓDSZERÉT?

Tanár: A középiskolában tanulták az egyenesvonalú egyenletesen változó mozgás sebesség-idő és út-idő grafikonjának értelmezését. Ezzel kapcsolatos az első kérdésem:

Egy test sebessége az 1. ábrán látható grafikon szerint változik. Legyen szíves, szerkessze meg ennek alapján az út-idő grafikont!



1. ábra

Diák: Sajnos, ilyen grafikon szerkesztésével én még soha nem találkoztam.

Tanár: De hiszen ez nem is olyan nehéz dolog! Próbáljuk meg közösen elvégezni a szerkesztést. Bontsuk fel a grafikont az időtengely mentén az 1., 2. és 3. szakaszra (lásd 1. ábra)! Most pedig nézzük meg először, hogyan mozog a test az első szakaszon, és hogyan fejezhető ki az út erre a szakaszra.

Diák: Az első szakaszon a test egyenletesen gyorsuló mozgást végez, nulla kezdő sebességgel. Ezen a szakaszon az út:

$$s(t) = at^2/2, \tag{1}$$

ahol: a – a test gyorsulása.

Tanár: Meg tudná nekem mondani a sebesség-idő grafikon alapján a gyorsulást?

Diák: Hogyne. A gyorsulás nem más, mint az egységnyi időre eső sebességváltozás. Jelen esetben ezt az AC és OC szakaszok aránya fejezi ki.

Tanár: Helyes a válasz. Most pedig nézzük tovább a 2. és 3. szakaszt.

Diák: A 2. szakaszon a test egyenletesen mozog azzal a v sebességgel, amelyet az 1. szakasz végén ért el. Az út tehát:

$$s = vt.$$

Tanár: A válasza nem pontos. Nem vette figyelembe, hogy a test nem a kezdeti időponttól, hanem csak a t_1 időtől végez egyenletes mozgást. Eddig azonban már az $at_1^2/2$ utat megtett. Tehát a megtett összes út az idő függvényében a 2. szakaszon a következő alakot ölti:

$$s(t) = at_1^2/2 + v(t - t_1). \tag{2}$$

Ezt szem előtt tartva írja fel az út kifejezését a 3. szakaszon.

Diák: A 3. szakaszon a test egyenletesen lassuló mozgást végez. Ha jól értettem az előző fejtegetést, akkor erre a szakaszra az út egyenletének a következőképpen kell kinéznie:

$$s(t) = at_1^2/2 + v(t_2 - t_1) + v(t - t_2) - a_1(t - t_2)^2/2,$$

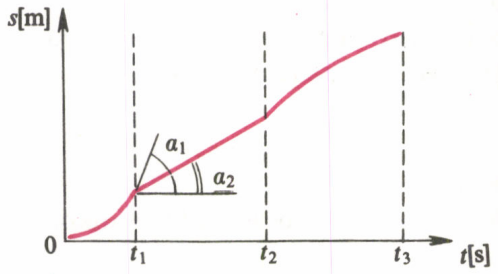
ahol a_1 – a gyorsulás a 3. szakaszon. Ennek értéke kétszer kisebb, mint az 1. szakaszon, mivel a 3. szakasz kétszer hosszabb az 1-nél.

Tanár: Ezt a kifejezést a következőképpen egyszerűsítjük:

$$s(t) = at_1^2/2 + v(t - t_1) - a_1(t - t_2)^2/2. \tag{3}$$

Most pedig nem maradt más, mint hogy megpróbálja nekem összegezni, hogy mit is fejeznek ki az (1)–(3) összefüggések.

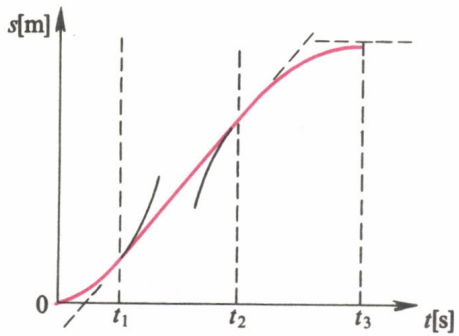
Diák: Igen, értem a feladatot. Az 1. szakaszon az út grafikonja parabola,



2. ábra

a 2. szakaszon egyenes, a 3. szakaszon pedig domború oldalával felfelé fordított parabola. A kész grafikonomat a 2. ábra szemlélteti.

Tanár: Az ábrázolása nem egészen tökéletes, mivel az út grafikus ábrázolásában nem lehetnek töréspontok, a paraboláknak érintőlegesen kell csatlakozniuk az egyeneshez. Ezen túlmenően, a megfordított parabola csúcsa a t_3 időpontban kell legyen. A pontos grafikont a 3. ábra adja meg.



3. ábra

Diák: Ezt nem egészen értem.

Tanár: Rögtön világosabb lesz, ha egy példával szemléltetjük ezt. Vegyük az út-idő grafikonnak egy tetszőleges szakaszát, ahogyan azt a 4. ábra mutatja. A t és $t+\Delta t$ időintervallumba eső szakaszon a test átlagos sebessége:

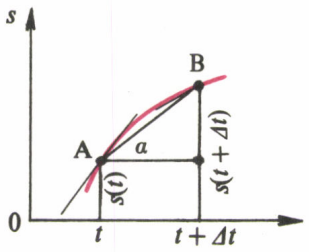
$$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \operatorname{tg}\alpha,$$

ahol α – az AB húrnak a vízszintessel bezárt szöge. Ha a test sebességét keressük a t pillanatban, akkor ki kell számolnunk az átlagos sebesség határértékét a $\Delta t \to 0$ feltétel mellett:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} . \qquad (4)$$

Határesetben az AB szakasz által meghatározott egyenes a görbe A pontjához húzott érintőbe megy át, ahogyan azt a 4. ábrán a vékony vonal mutatja. Az érintő és a vízszintes által bezárt szög tangense pedig megadja a t időpontban a test pillanatnyi sebességét. **Tehát az út görbéjéhez húzott érintő meredeksége alapján bármely időben megkaphatjuk a test sebességét.**

Most pedig nézzük meg rajzát (2. ábra)! Ebből az következik, hogy a t_1 időpontban (illetve a t_2 időpontban is) a test sebessége két különböző értéket vesz fel: ha a t_1 ponthoz balról közelítünk, akkor a sebesség tg α_1, jobbról közelítve pedig tg α_2. Az ábrázolásában a sebességfüggvénynek a t_1 és t_2 időpontban szakadásnak kellene lennie, ami viszont nem igaz, hiszen az 1. ábrán a sebességet folytonos görbe írja le.



4. ábra

Diák: Igen, értem. **A sebesség görbéjének folytonossága azt eredményezi, hogy az út-idő grafikon átmenetei érintőlegesek.**

Tanár: Ezt még annyival egészíteném ki, hogy a parabolák csúcsának a 0 és t_3 időpontokba kell esniük, mivel a test sebessége ezeken a helyeken nullával egyenlő, és az út görbéjéhez húzott érintőnek ezért itt vízszintesnek kell lennie.

Most pedig az 1. ábra sebesség-idő grafikonja alapján próbálja meg kiszámítani a test által megtett út hosszát, pl. a t_2 időpontig!

Diák: Ehhez mindenekelőtt meg kell határoznom a sebességi-idő grafikon alapján az 1. szakasz a gyorsulását, illetve a 2. szakasz v sebességét, majd behelyettesíteni azokat a (2) kifejezésbe. A test által a t_2 időpontig megtett út hossza:

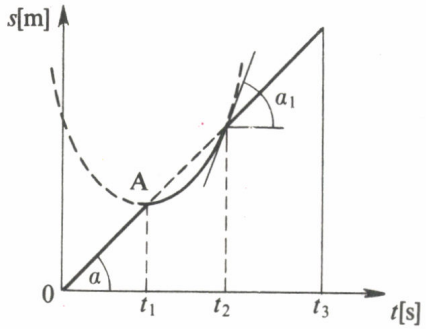
$$s(t_2) = at_1^2/2 + v(t_2 - t_1).$$

Tanár: Az eredmény helyes, azonban létezik egyszerűbb megoldás is. A test által a t_2 idő alatt megtett út egyenlő az OABD négyszög területével. (A sebességgörbe alatti terület az $0t_2$ szakaszon.) A most elsajátított módszer rögzítése érdekében végezzünk el még egy ellenőrző feladatot!

Tételezzük fel, hogy az út görbéje töréspontokat tartalmaz. Ezt a görbét az 5. ábra mutatja, ahol szaggatott vonallal jelöltük azt a parabolát, amelynek a csúcsa az A pontban helyezkedik el. Rajzolja fel kérem, ennek alapján a sebesség-idő grafikont!

Diák: Mivel az út-idő grafikon töréspontokat tartalmaz, ezért a sebesség-idő grafikon megfelelő helyein a t_1 és t_2 pontokban szakadásos függvényt kapunk. A sebesség-idő grafikont a 6. ábrán tüntettem fel.

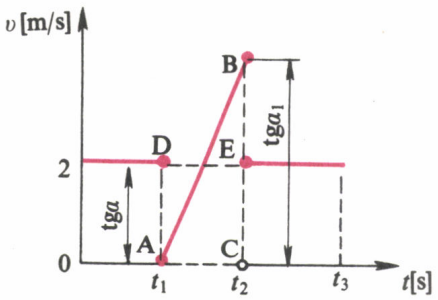
Tanár: Megoldása pontos. És mivel egyenlő a BC szakasz?



5. ábra

Diák: Egyenlő $\operatorname{tg}\alpha_1$-gyel az 5. ábrán. Az α_1 szög értékét azonban, sajnos, nem ismerjük.

Tanár: A BC szakasz hosszát ennek ellenére könnyen megkaphatjuk. Nézze csak meg, kérem, hogy a test a t_3 idő alatt pontosan annyi utat tett meg, mintha egész idő alatt egyenesen mozgott volna, hiszen az 5. ábrán a t_2 és t_3 közötti szakasz egyenes folytatása a



6. ábra

0 és t_1 közötti szakasznak! Mivel azonban a test által megtett utat a sebesség-idő grafikon a sebességgörbe alatti terület szolgáltatja, ebből következik, hogy a 6. ábrán az ADEC négyszög területének egyenlőnek kell lennie az ABC háromszög területével.

Ebből pedig azt kapjuk, hogy BC = 2EC, azaz a test sebessége a t_2 pontban (ha azt balról közelítjük) egyenlő a 0 és t_1, illetve a t_2 és t_3 időpontok közötti egyenletes mozgás sebességének kétszeresével.

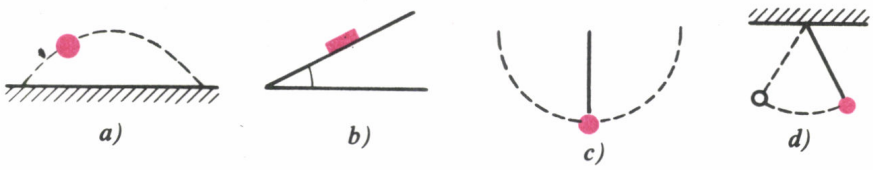
Feladat:

1. Adott a 6. ábrán bemutatott sebesség-idő grafikon ($t_1 = 2$s, $t_2 = 4$s, $t_3 = 6$s). Rajzoljuk meg a gyorsulás-idő grafikont! Számítsuk ki az átlagos sebességet: *a)* az első négy másodperc alatt; *b)* a teljes mozgási időre (hat másodpercre). Mely T időpontokban esik egybe a pillanatnyi sebesség a teljes mozgási időre számított átlagos sebességgel?

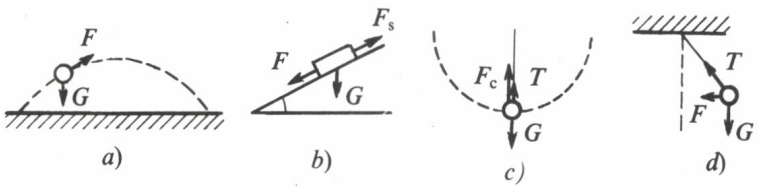
2. FEL TUDJÁK-E RAJZOLNI A TESTRE HATÓ ERŐKET?

Diák: A mechanikai feladatok megoldása jelenti számomra a legnagyobb problémát. Elkezdenem nehéz a feladat megoldását.

Tanár: Igen sok esetben azzal kell kezdeni, hogy felrajzoljuk a testre ható erőket. Vegyük például a 7. ábrán feltüntetett eseteket: *a)* a testet a vízszintessel hegyes szöget bezáró irányban eldobtuk; *b)* a test a lejtőn csúszik lefelé; *c)* a test egy huzal végén a függőleges síkban körpályán forog; *d)* a test ingamozgást végez. Rajzolja fel a testekre ható erőket és értelmezze azokat!



7. ábra



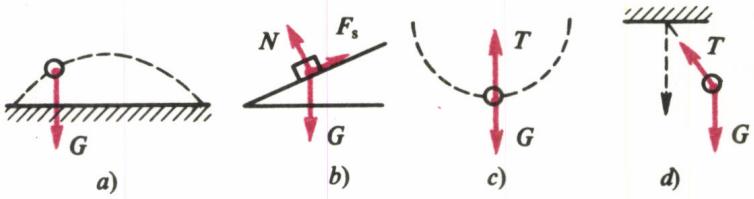
8. ábra

Diák: A testre ható erőket a 8. ábrán tüntettem fel. Az egyes erővonalak jelentése a következő: *a)* esetben: G – a test súlya; F – a hajítóerő; *b)* esetben; G – a test súlya, F – a „csúsztató" erő, F_s – a súrlódási erő; *c)* esetben: G – a test súlya, F_c – a centripetális erő,

KÖNYVTÁR

T – a fonál húzóereje; *d)* esetben pedig: G – a test súlya, F – a függőleges helyzetbe visszatérítő erő, T – a fonál húzóereje.

Tanár: Sajnos, mind a négy esetben figyelmetlen volt. A hatóerők helyes feltüntetését a 9. ábra mutatja.



9. ábra

Jól jegyezzük meg, hogy az erő a testek kölcsönhatása következtében jön létre. Éppen ezért, mielőtt felrajzolnánk az adott testre ható erőket, arra a kérdésre kell válaszolnunk, hogy milyen külső testek vannak azzal kölcsönhatásban. Ebből a szemszögből vizsgálva példáinkat, világos, hogy az első esetben a testtel csak a Föld áll kölcsönhatásban, csupán a gravitációs erő hat arra (9. *a)* ábra). Tehát a hatóerők közül ebben az esetben egyedül a test G súlyát lehet feltüntetni. Természetesen, ha figyelembe vennénk a levegő súrlódási ellenállását vagy például a szél hatását, akkor ezeket a hatóerőket is fel kellene tüntetnünk. Az előbb felvázolt „hajító erő" a természetben nem létezik, mivel nem létezik olyan kölcsönhatás, amely a nevezett erőtípus megjelenését eredményezné.

Diák: Ezt nem egészen értem, hiszen ahhoz, hogy a testet eldobjuk, bizonyos erővel kell arra hatnunk.

Tanár: Ez valóban igaz. Amikor eldobjuk a testet, abban a pillanatban bizonyos erővel hatunk is rá. Az általunk említett esetben azonban a test mozgását az eldobást követő időben vizsgáljuk, amikor a repülés kezdeti sebességét a testtel közlő, a karunk által kifejtett erő hatása már megszűnt, és a továbbiakban csupán annak hatását észleljük, ami a test kezdeti sebességében nyilvánul meg.

Lehetetlen dolog az erők „felhalmozódása". Amint megszűnik két test kölcsönhatása, ezzel együtt eltűnik a köztük ható erő is.

Diák: Bocsásson meg kérem, de ha azt állítjuk, hogy a testre kizárólag a súlya által képviselt gravitációs erő hat, akkor nem értem, hogy az miért nem esik le függőlegesen és miért mozog ettől eltérő pályán?

Tanár: Önt ugye az lepi meg, hogy jelen esetben a test mozgási iránya nem esik egybe a reá ható erő irányával? Erre csak azt tudom mondani, hogy nincs ebben semmi meglepő, mivel a mozgás teljesen eleget tesz Newton második törvényének. Kérdése elárulja, hogy nem eléggé gondolta át Newton törvényét. Javaslom, hogy ezt részleteiben később vitassuk meg (lásd 4. óra), most pedig folytassuk a feladatban szereplő mozgó testek további vizsgálatát. A második esetben (9. *b)* ábra) a test egy lejtőn csúszik lefelé. Milyen testek vannak vele kölcsönhatásban?

Diák: Úgy gondolom, hogy a Föld és a lejtő.

Tanár: Helyes a válasza. A kölcsönhatásban levő testek alapján pedig meghatározzuk az adott testre ható erőket. A Föld kölcsönhatásának következménye a G súly, a lejtő kölcsönhatásának pedig az F_s – csúszó súrlódási erő és az N erő, amelyet általában reakcióerőnek nevezünk. Ez utóbbi N erőt a rajzán egyáltalán nem is tüntette fel.

Diák: Megállhatnánk itt egy pillanatra? Nekem úgy tűnik, hogy a lejtő tehát nem egy, hanem két erővel hat a testre. Hogyan lehetséges ez?

Tanár: Ez természetesen nem lehetséges. Hatóerő mindössze egy van, azonban célszerű azt két összetevőjére felbontani, amelyek közül az egyik a lejtő síkjával párhuzamos (a csúszó súrlódási erő), a másik pedig merőleges arra (reakcióerő). Az a tény, hogy ez a két erő közös eredetű, azazhogy, egy és ugyanazon erő két összetevőjével állunk szemben, az F_s és N erők közötti általános érvényű összefüggésben jut kifejezésre:

$$F_s = \mu \cdot N, \tag{5}$$

ahol μ – a csúszó súrlódási együttható. Később ezt az összefüggést a 3. órán még részletesen megvizsgáljuk.

Diák: A rajzon én feltüntettem az F – „csúsztató" erőt. A most elmondottakból úgy tűnik, hogy ez az erő nem létezik. Én azonban határozottan emlékszem, hogy korábban igen gyakran használtuk a „csúsztató erő" kifejezést. Azóta ez megváltozott volna?

Tanár: Nem, ez a kifejezés valóban él és létezik, mindössze arról feledkezett meg, hogy a csúsztató erő nem más, mint a test súlyának az alátámasztási síkra merőleges, illetve azzal párhuzamos irányú összetevői közül az utóbbi. Ha a testre ható erők felsorolásakor a test súlyát számításba vette, akkor a „csúsztató" erő említése már felesleges.

A harmadik esetben (9. *c)* ábra) a test a függőleges síkban forog. Mely testek hatnak itt a vizsgált testre?

Diák: Két test hat rá: a Föld és a kötél.

Tanár: Igen. Tehát a testre két erő hat: a test súlya és a kötél húzóereje.

Diák: De hová lesz akkor a centripetális erő?

Tanár: Csak nyugalom! A körmozgással kapcsolatban rendszerint igen sok hibát követnek el a felvételizők, ezért azt javaslom, hogy szenteljünk ennek a kérdésnek egy külön órát (lásd 8. óra). Itt elégedjünk meg csupán azzal a megjegyzéssel, hogy a centripetális erő nem tekinthető a testre még pluszként ható erőnek, hanem az nem más, mint a testre ható erők eredője. Az adott helyzetben (amikor a test a körpálya alsó pontján helyezkedik el) a centripetális erőt a kötél húzóerejének és a test súlyának különbsége szolgáltatja.

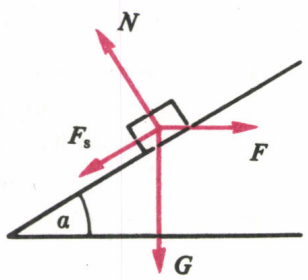
Diák: Ha jól értem, akkor ez azt jelenti, hogy a negyedik esetben (9. *d)* ábra) a visszatérítő erőt szintén úgy kell felfogni, mint a test súlyának és a kötél húzóerejének eredőjét?

Tanár: Pontosan így van. Itt valóban ugyanaz a helyzet, mint a harmadik esetben: a testtel két külső test, a Föld és a kötél áll kölcsönhatásban, és ebből következik, hogy két erő is hat rá: a súly és a kötél húzóereje.

Még egyszer szeretném hangsúlyozni, hogy az erő két test kölcsönhatásának eredményeként jön létre, nem pedig holmi „segédelméletekből" keletkezik. Ha megtaláltuk az adott testtel kölcsönhatásban levő külső testeket, máris egyszerűen fel tudjuk tüntetni a rá ható erőket.

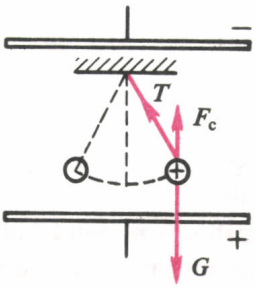
Diák: Bizonyára vannak az Ön által a 7. ábrán feltüntetett eseteknél sokkal összetettebbek is. Nem nézhetnénk meg néhány ilyen példát?

Tanár: A testek kölcsönhatásának összetettebb eseteire szinte végtelen sok példát sorolhatnánk fel. Az egyik ilyen – még mindig nem túl bonyolult – példa, amikor a testre egy vízszintes irányú, állandó



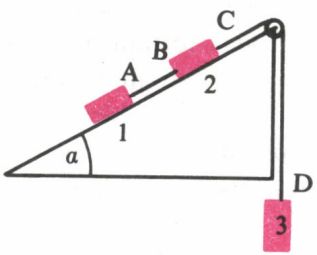
10. ábra

nagyságú F erővel hatunk, aminek következtében az egy lejtőn felfelé mozdul el. A testre ható erőket ebben az esetben a 10. ábra szemlélteti. Egy másik példa lehetne a síkkondenzátor belsejében elhelyezett, pozitív töltéssel rendelkező inga. A testre ható erőket jelen esetben ki kell egészíteni az F_c erővel, amellyel a kondenzátor erőtere hat a feltöltött ingára (lásd 11. ábra). Érthető, hogy az összes lehetséges esetek felsorolása gyakorlatilag szinte megvalósíthatatlan feladat.



11. ábra

Diák: És mi a helyzet akkor, ha a feladat nem egy, hanem több testre ható erők vizsgálata? Olyan esetre gondolok, mint például a 12. ábrán feltüntetett.

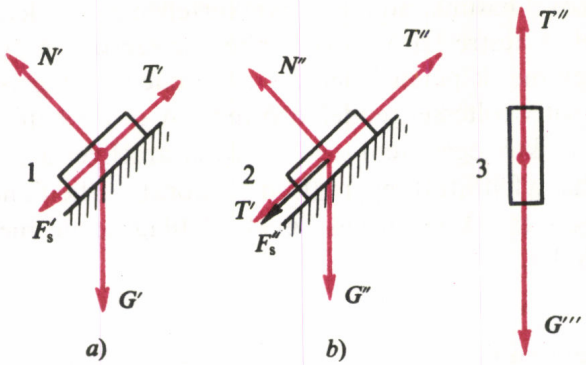


12. ábra

Tanár: **Ilyen esetekben mindig előre el kell döntenünk, hogy melyik test (vagy testek) mozgását kívánjuk vizsgálni.** Nézzük meg például az Ön által javasolt példában az 1. test mozgását. Ezzel a testtel a Föld, a lejtő és az AB kötél áll kölcsönhatásban.

Diák: De vajon a 2. test nem áll kölcsönhatásban az elsővel?

Tanár: Nem, annak ellenére, hogy az AB kötél összeköti őket. Az 1. testre ténylegesen a következő erők hatnak: a G' súlya, az F_s' súrlódási erő, az N' reakcióerő és az AB kötél T' húzóereje (13. *a)* ábra).



13. ábra

Diák: És miért mutat az Ön rajzán a súrlódási erő balra? Én azt hiszem, hogy ugyanúgy rajzolhatnánk jobbra is.

Tanár: **A súrlódási erő irányának meghatározásához ismernünk kell a test elmozdulási irányát. Ha a feladatban nincs megadva az elmozdulás iránya, akkor feltételesen bármelyik irányt választhatjuk.** Most én például feltételezem, hogy az 1. test (és vele együtt a 2. és 3. test is) jobbra, illetve lefelé mozog, azaz a lejtő csúcsán elhelyezett csiga az óramutató járásával megegyező irányban forog. Természetesen ez csak feltételezés, mert az elmozdulás valódi iránya csakis a számszerű értékek behelyettesítése után válik ismertté. Ha az irányt történetesen helytelenül választottam meg, akkor a gyorsulás kiszámításakor negatív előjellel kapom az eredményt. Ez azt jelenti, hogy a test nem jobbra, hanem balra mozdul el, ennek megfelelően kell berajzolni a súrlódási erő irányát, majd a gyorsulás képletébe történő behelyettesítéssel ismételten ellenőrizni az előjelet.

Diák: Nem értem, miért kell másodszor is ellenőrizni az előjelet? Hiszen ha jobbra történő elmozdulást feltételezve negatív előjelet kaptunk, akkor bal irányú elmozdulást feltételezve pozitív előjelet kell kapnunk.

Tanár: Nem biztos, a második esetben is kaphatunk negatív előjelet.

Diák: Sajnos, ezt én nem értem. Hát nem magától értetődik, hogy ha a test nem jobbra, akkor balra mozog?

Tanár: Megfeledkezik arról, hogy a test nyugalomban is lehet. Erre az esetre még később visszatérünk, és akkor részletesen elemezzük (a 7. órán) a súrlódási erő figyelembevételéből eredő nehézségeket.

Most pedig tételezzük fel, hogy a csiga az óramutató járásával megegyező irányban forog, és vizsgáljuk meg a 2. test mozgását.

Diák: A 2. testtel a Föld, a lejtő síkja, az AB kötél és a CD kötél áll kölcsönhatásban. A 2. testre ható erőket a 13. *b)* ábrán tüntettem fel.*

Tanár: Ragyogó! Most pedig nézzük meg a 3. testet!

Diák: A 3. test csak a Földdel és a CD kötéllel áll kölcsönhatásban. A testre ható erőket a 13. *c)* ábra mutatja.

Tanár: **Amikor elkészültünk az egyes testekre ható erők felrajzolásával, hozzálátunk a mozgási egyenletek egyenkénti felírásához, majd pedig a kapott egyenletrendszer megoldásához**

Diák: Az előbb tetszett említeni, hogy nem feltétlenül kell az egyes testeket külön-külön vizsgálni, hanem lehet azokat együttesen is értékelni.

Tanár: Valóban. Az 1., 2. és 3. test mozgását nem feltétlenül kell különkülön vizsgálni, ahogyan mi végeztük, hanem egységes rendszernek is tekinthetjük őket. **Ebben az esetben nem kell figyelembe vennünk a kötelek feszítőerejét, mivel itt ezek belső erőkként** (a vizsgált rendszer egyes elemei között ható erőként) jelentkeznek. A három testből álló egységes rendszer ily módon csupán a Földdel és a lejtővel áll kölcsönhatásban.

Diák: Szeretnék még egy részletkérdést tisztázni. Amikor a 13. *b)* és *c)* ábrákon az erőket rajzoltam, feltételeztem, hogy a BC kötélre ugyanolyan nagyságú feszítőerő hat a csigától mindkét irányban. Vajon helytálló-e ez a feltételezésem?

Tanár: Igen, de csak ha bizonyos közelítéssel élünk. A valóságban azonban, ha a csiga az óramutató járásával megegyező irányban forog, akkor a CD kötélnek a 3. testhez csatlakozó szakaszára ható feszítőerőnek nagyobbnak kell lennie a 2. testhez csatlakozó szakaszára ható erőnél. Ez érthető is, ha arra gondolunk, hogy ez az erőkülönbség szolgáltatja a csigának a gyorsulást. Példánkban feltételeztük, hogy a csiga tömege elhanyagolhatóan kicsi, tehát annak mozgásba hozásához nem szükséges külön erő. A csigát csupán a 2. és 3. testet összekötő kötél mozgási irányának megváltoztatására használtuk, ezért elfogadhatjuk, hogy a CD kötélre a csi-

* Itt T' csak az erő nagyságát jelenti, az erő irányát külön (szavakban) határozzuk meg. Ezért lehetséges, hogy a 13. *a)* és 13. *b)* ábrán szereplő különböző irányú, de azonos nagyságú erők mindegyikét ugyanazzal a betűvel jelöljük. — *A szerk.*

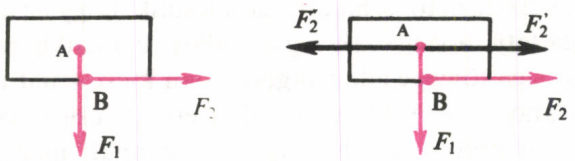
gától jobbra, illetve balra ható feszítőerő értéke azonos. A csiga tömegét a számításoknál rendszerint elhanyagolhatjuk, ellenkező esetben arra külön felhívják a figyelmet. Van még esetleg, ami nem teljesen világos?

Diák: Igen, még lenne egy kérdésem, amely a hatóerők támadási pontjával kapcsolatos. Az összes eddigi ábrán úgy tüntettük fel az erőket, hogy azok a test egy pontjában hatnak arra. Ez helyesnek tekinthető? Ha vesszük például a súrlódási erőt, annak a támadási pontját vehetjük a test súlypontjában?

Tanár: **Ne feledjük el, hogy egyenlőre nem a véges kiterjedésű testek kinematikájával és dinamikájával foglalkozunk. Pontszerűnek tekintjük a tömegeket. A rajzokon pedig egyszerűen a szemléletesség kedvéért térünk el a pontszerű ábrázolástól. Tehát a testre ható összes erőt jogosan tüntetjük fel egyetlen pontban hatónak.**

Diák: Tanáraink eddig állandóan arra figyelmeztettek, hogy minden egyszerűsítés végeredményben a vizsgált jelenség bizonyos vonásainak elhanyagolásához vezet. Mit hagyunk figyelmen kívül azzal, hogy a testet pontszerű tömegként fogjuk fel?

Tanár: Ezzel az egyszerűsítéssel elhanyagoljuk a forgatónyomatékokat, amelyek reális esetben a test elfordulásához vagy felborulásához vezetnek. A pontszerű tömeg csak haladó mozgást képes végezni. Nézzünk egy példát! Legyen a 14. ábrán levő test A pontjában ható erő F_1, a B pontjában pedig F_2. Vegyünk fel két fiktív segéderőt, amelyek az A pontban hatnak! Az F_2' legyen egyenlő és párhuzamos az F_2-vel, az F_2'' pedig ugyanolyan nagy, de vele ellentétes irányú (lásd 14. *b)* ábra). Mivel az F_2' és F_2'' erők kölcsönösen kiegyenlítik egymást, így ezek megjelenésével fizikai értelemben semmit sem változtattunk meg. A 14. *b)* ábrát azonban



a) *b)* 14. ábra

a következőképpen magyarázhatjuk: a testre az A pontban a haladó elmozdulását okozó F_1 és F_2' erők hatnak, ezenkívül pedig hat az F_2 és F_2'' erőpár, amely a testen forgó mozgást hoz létre. Más szavakkal,

az F_2 erőt átvihetjük az A pontba, ha ezzel együtt a megfelelő forgatónyomatékot is feltüntetjük. Természetesen, ha a testet pontszerű tömegnek tekintjük, akkor ez a forgatónyomaték értelmét veszíti.

Diák: Ön azt mondja, hogy a pontszerű tömeg nem képes forgó mozgást végezni, csak haladó mozgást. Mi viszont tanultunk a pont forgó mozgásáról, mégpedig a körmozgásról.

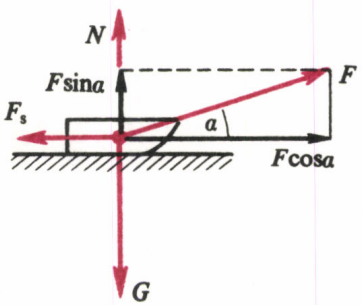
Tanár: Nehogy összekeverje ezeket az eltérő fogalmakat! A pont haladó mozgása különféle pályák mentén történhet, többek között körpályán is. A pont forgó mozgásának lehetetlensége alatt azt értem, hogy a pont nem képes saját maga körül, azaz a ponton áthaladó tengely körül forogni.

3. KI TUDJÁK-E SZÁMOLNI A SÚRLÓDÁSI ERŐT?

Tanár: Néhány feladat kapcsán szeretnék egy kissé részletesebben beszélgetni a súrlódási erő kiszámításáról. Súrlódás alatt itt a száraz csúszó súrlódást értem, ami azt jelenti, hogy a súrlódó felületek szabadon érintkeznek, nincs közöttük kenőanyag, például olaj.

Diák: Azt hiszem, ez olyan része a fizikának, amely teljesen egyértelmű és világos.

Tanár: Ennek ellenére az a helyzet, hogy a felvételi vizsgázók igen sok hibát ejtenek a súrlódási erő kiszámításakor. Nézzük meg például a 15. ábrán bemutatott feladatot!



15. ábra

A G súlyú szánt a vízszintessel α szöget bezáró irányban egy kötél F erővel húzza. A csúszó súrlódás együtthatója μ. Számítsuk ki a súrlódási erőt!

Hogyan oldaná meg ezt a feladatot?

Diák: Ez nagyon egyszerű! A súrlódási erő egyenlő μG-vel, ahol $G = mg$.

Tanár: Téved. A súrlódási erő nem μG-vel, hanem μN-nel egyenlő, ahol N az alátámasztási felület reakcióereje. Gondoljon csak a 2. óra (5) kifejezésére!

Diák: Vajon a test súlya és a reakcióerő között van valami különbség?

Tanár: Egyedi esetben ezek valóban lehetnek azonosak is. Általánosságban azonban ez két teljesen különböző erő. Nézzük meg előbbi példánkat! A testre ható erők: G súlya, az N reakcióerő, az F_s súrlódási erő és a kötél F húzóereje (lásd 15. ábra). Bontsuk fel az F erőt az $F \cdot \sin \alpha$ értékű függőleges és az $F \cdot \cos \alpha$ értékű vízszintes összetevőkre. A függőleges irányban ható erőket összegezve kapjuk meg a reakcióerő értékét:

$$N = G - F \cdot \sin \alpha. \tag{6}$$

A kifejezés világosan mutatja, hogy ez az erő nem azonos a szánkó súlyával, hanem $F \cdot \sin \alpha$ értékkel kisebb. Fizikai szemléletünk alapján is természetes ez, hiszen ha a kötelet a vízszintessel valamilyen szöget bezáró irányban húzzuk, akkor ezzel mintegy „megemeljük" kissé a szánt, következésképpen csökken a felületre merőleges nyomóerő – és ezzel együtt a reakcióerő – értéke. Tehát erre az esetre a súrlódási erőt a következőképpen kapjuk:

$$F_s = \mu(G - F \cdot \sin \alpha). \tag{7}$$

Ha az az egyedi eset áll elő, hogy a kötél vízszintes ($\alpha = 0$), akkor a (6) kifejezés egyszerűen $N = G$, a súrlódási erő pedig valóban $F_s = \mu G$.

Diák: Most már értem, sajnos korábban ezen soha nem is gondolkoztam el.

Tanár: Igen, ez a hiba másnál is előfordul. A felvételizők igen gyakran értelmezik a súrlódási erőt hibásan, a súrlódási együttható és a test súlyának szorzataként. Pedig az $F = \mu \cdot N$ szorzatban a reakcióerő szerepel!

Diák: Azt hiszem, a jövőben helyes lesz, ha azt a szabályt követem, hogy a súrlódási erő kiszámítását a felületre merőleges nyomóerő meghatározásával kezdem.

Tanár: Eddig a csúszó súrlódásról volt szó, most nézzük meg a nyugalmi (tapadó) súrlódási erőt. Itt sajátos helyzettel állunk szemben, amelyet a tanulók nem mindig vesznek figyelembe. Lássuk a következő példát! A test egy vízszintes alátámasztási felületen nyugalomban van. Egy vízszintes F erő igyekszik azt helyzetéből kimozdítani. Mit gondol, mivel egyenlő ebben az esetben a súrlódási erő?

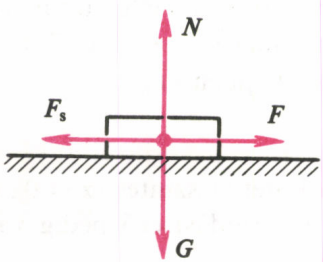
Diák: Ha a test vízszintes felületen fekszik és az F erő is vízszintes, akkor az N egyenlő G-vel.

Tanár: Igen, és tovább?

Diák: Ebből következik, hogy a súrlódási erő μG értéket vesz fel.

Tanár: És ezzel máris elkövette azt a szabványhibát, hogy összetévesztette a nyugalmi súrlódást a csúszó súrlódással. Ha a test csúszna, akkor megoldása helyes lenne, azonban kikötöttük, hogy a test nyugalmi helyzetben van. A nyugalmi helyzet elengedhetetlen feltétele pedig az, hogy a testre ható erők kölcsönösen kiegyenlítsék egymást. A 16. ábrán a testre négy erő hat: a G súlya, az N reakcióerő, az F erő és az F_s nyugalmi súrlódási erő. A függőleges irányú G és N erők kölcsönösen kiegyenlítik egymást, tehát az F és az F_s erőknek is megegyező értékűeknek kell lenniük:

$$F_s = F. \tag{8}$$



16. ábra

Diák: Tehát akkor a nyugalmi súrlódási erő értéke annak az erőnek a nagyságától függ, amellyel ki akarjuk mozdítani azt nyugalmi helyzetéből?

Tanár: Pontosan így van. Az F erő növelésével a nyugalmi súrlódási erő is nő. Ez a növekedés azonban nem tart a végtelenig. A nyugalmi súrlódási erő maximális értéke:

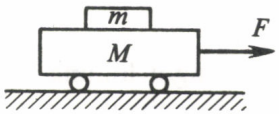
$$F_{s\,max} = \mu_0 \cdot N. \tag{9}$$

A μ_0 együttható valamivel nagyobb, mint a csúszó súrlódásra jellemző μ súrlódási együttható, amely az (5) egyenletben szerepelt. Ha a külső F erő növelésekor annak értéke eléri a $\mu_0 N$-et, a test kimozdul nyugalmi helyzetéből. Ekkor a súrlódási együttható értéke μ_0-ról μ-re változik, tehát a súrlódási erő értéke valamelyest csökken. Az F erő további növelése már nem vezet a súrlódási erő (amely itt már csúszó súrlódási erő) növekedéséhez (egészen az igen nagy sebességértékekig), mindössze a test egyre növekvő gyorsulással mozog. Igen sok vizsgázó azzal igazolja, hogy nem

tudja helyesen kiszámítani a súrlódási erőt, hogy a következő, meglehetősen egyszerű kérdésre a legkülönfélébb helytelen választ adja: mivel egyenlő a súrlódási erő, ha a G súlyú test a vízszintessel α szöget bezáró lejtőn nyugalmi helyzetben van? Egyesek azt válaszolják, hogy μG, mások pedig, hogy $\mu N = \mu mg \cos \alpha$.

Diák: Én úgy gondolom, tudom a megoldást. Mivel a test nyugalmi helyzetben van, tehát a nyugalmi súrlódási erővel kell számolni. Ezt pedig a lejtő síkja mentén haladó erők egyensúlyából kaphatjuk meg. Jelen esetben a testre két ilyen erő hat: az F_s súrlódási erő és az $mg \sin \alpha$ csúsztató erő. Tehát a helyes válasz: $F_s = mg \sin \alpha$.

Tanár: Pontosan ez az. Végül nézzük meg még a 17. ábrán bemutatott feladatot!



17. ábra

Az m tömegű test az M tömegű testen fekszik. A két test közötti nyugalmi súrlódási erő maximális értéke a μ_0 súrlódási együtthatóval jellemezhető. Az M test és a Föld felszíne között is tekintsünk el a súrlódástól. Számítsuk ki az F erőnek azt a minimális értékét, amellyel az M testre hatva, az m test megcsúszik azon.

Diák: Először feltételezem, hogy az F erő kicsi, tehát az m test nem csúszik meg. Ebben az esetben mindkét test gyorsulása azonos:

$$a = \frac{F}{M+m}.$$

Tanár: Igen. Milyen erő adja ezt a gyorsulást az m testnek?

Diák: Az $F_s = ma$ nyugalmi súrlódási erő:

$$F_s = \frac{F}{M+m} \cdot m.$$

Ebből következik, hogy az F erő növelésével az F_s nyugalmi súrlódási erőnek is nőnie kell. Ez azonban nem nőhet minden határon túl. A maximális értéke:

$$F_{s\,max} = \mu_0 N = \mu_0 mg.$$

Következésképpen az F erő azon maximális értékét, amelynél a

két test még együtt, egységes rendszerként mozdul el, a következő feltételből kapjuk:

$$\mu_0 mg = \frac{Fm}{M+m}.$$

Innen pedig:

$$F = (M+m)\mu_0 g.$$

Ez egyben az a minimális erő is, amelynél az m test az M testhez viszonyítva elmozdul, megcsúszik azon.

Tanár: Helyesen oldotta meg a feladatot és a magyarázata is teljesen kielégítő.

Feladatok:

2. Egy α meredekségű lejtőn fölfelé egy korongot lökünk el. Egy idő után a korong megáll, majd lefelé csúszik. Számítsuk ki a korong és a lejtő közötti μ súrlódási együtthatót, ha a lefelé csúszás ideje n-szerese a felfelé csúszás idejének!

3. Egy m tömegű deszkadarabot egy olyan lejtőn helyezünk el, amelynek a meredekségét 0 és 90° között tudjuk változtatni. Szerkesszük meg a súrlódási erő grafikonját az α szög függvényében! A súrlódási együttható értéke legyen μ.

4. JÓL ISMERIK NEWTON TÖRVÉNYEIT?

Tanár: Mondja el kérem, Newton első törvényének meghatározását!

Diák: Minden test megmarad nyugalmi állapotában vagy egyenesvonalú egyenletes mozgásában mindaddig, amíg külső erő meglevő állapotának megváltoztatására nem kényszeríti.

Tanár: Bármely derékszögű koordináta-rendszerben érvényes ez a törvény?

Diák: Sajnos, nem értem a kérdést.

Tanár: Amikor azt mondjuk, hogy a test megmarad nyugalmi állapotában, akkor ezen természetesen azt értjük, hogy az mozdulatlan valamely külső testhez viszonyítva, amelyhez jelen esetben a koordináta-rendszer csúcspontját rögzítettük. **A koordináta-rendszer feltüntetése nélkül nincs értelme valamely test nyugalmi állapotáról vagy konkrét mozgásról beszélni.** Egy test mozgásának jellemző vonásait a koordináta-rendszer megválasztása determinálja. Például egy mozgó vasúti vagon padlóján fekvő test nyugalmi állapotban van a vagonhoz rögzített koordináta-rendszerben, ugyanakkor mozgásban van a sínhez rögzített koordináta-rendszerhez képest. E rövid magyarázat után térjünk vissza az eredeti kérdéshez! Bármely derékszögű koordináta-rendszerben érvényes Newton első törvénye?

Diák: Hát, ... úgy gondolom, hogy... bizonyára mindegyikben.

Tanár: Látom, hogy ez a kérdés váratlanul érte. Az igazság azonban az, hogy **Newton első törvénye nem teljesül bármilyen koordináta-rendszerben.** Vegyük csak azt az egyszerű példát, amikor egy test a vasúti vagon padlóján fekszik, a test és a padló közötti súrlódást elhanyagoljuk. A test helyzetét vizsgáljuk a vagonhoz rögzített koordináta-rendszerben! Ekkor a következő képet figyelhetjük meg: a test a padlón nyugalmi állapotban van, majd pedig minden külső behatás nélkül hirtelen elkezd csúszni azon. Úgy tűnik,

hogy Newton első törvénye hatályát veszítette!?! A jelenség magyarázata a következő; az egyenesvonalú egyenletes mozgást végző vagon hirtelen fékezni kezdett, és a súrlódásmentes elmozdulás következtében a test megtartotta egyenesvonalú egyenletes mozgását a vasúti sínhez viszonyítva. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy Newton első törvénye teljesül a sínhez rögzített koordináta-rendszerben, de nem teljesül a vagonhoz rögzített koordináta-rendszerben.

Azokat a rendszereket, amelyekben Newton első törvénye teljesül, inerciarendszernek, azokat pedig, amelyekben nem teljesül, nem-inerciális vagy gyorsuló rendszernek nevezzük. Az általunk vizsgált jelenségek többségére érvényes, hogy azok a rendszerek, amelyek a Föld felszínéhez, illetve a Földön nyugvó vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végző testekhez rögzítettek – inerciarendszereknek tekinthetők. A nem-inerciális rendszerhez azokat a testeket soroljuk, amelyek gyorsuló mozgást végeznek, pl. a forgó mozgást végző testek, a gyorsuló vagy lassuló liftek stb. Itt jegyzem meg, hogy a gyorsuló rendszerekben nemcsak Newton első, de második törvénye sem érvényes.

Diák: Elnézést kérek, de ha a gyorsuló rendszerekre nem érvényesek Newton törvényei, akkor ezekben a rendszerekben hogyan vizsgáljuk a mechanikai jelenségeket?

Tanár: Eddig mi csak a testek kölcsönhatásából eredő erőket vizsgáltuk. A mechanikában azonban léteznek olyan erők is, amelyek nem a testek kölcsönhatásaként jönnek létre, az ún. tehetetlenségi erők. Ezekre nem érvényes Newton harmadik törvénye. Ha vizsgálatunkat a „szokásos" (azaz a testek kölcsönhatásából eredő) erőkön túl a tehetetlenségi erőre is kiterjesztjük, akkor Newton törvényei a gyorsuló rendszerekben is érvényesek lesznek. A tehetetlenségi erő egyenlő a test tömegének és a vonatkoztatási rendszer gyorsulásának szorzatával, iránya pedig a gyorsulással ellentétes, azaz $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}$. Vegyünk például egy a gyorsulással függőlegesen fölfelé mozgó lifetet, amelynek a padlóján egy m tömegű test található. A lifthez rögzített koordináta-rendszerben két „szokásos" erőt – a padlóra ható N reakcióerőt és a test G súlyát, valamint az $F_t = ma$, lefelé irányuló tehetetlenségi erőt kell számításba venni. Ebben a rendszerben a test nyugalmi helyzetben van, tehát $N - G - F_t = 0$. A gyorsuló rendszer egy érdekesebb példájával találkozunk, majd a 12. órán.

Diák: Tehát Newton első és második törvénye mégiscsak alkalmazható a gyorsuló rendszerekben?

Tanár: Igen, ha a testhez a tehetetlenségi erőt is hozzárendeljük. Nem alkalmazható viszont, ha megelégszünk a „szokásos", azaz a testek kölcsönhatásából fakadó erőkkel. Azt szeretném javasolni, hogy a feladatok megoldása során lehetőleg csak inerciarendszereket tegyen vizsgálat tárgyává. Ekkor az összes erő, amelyet figyelembe kell vennie, „szokásos", azaz a testek kölcsönhatásából fakadó erő lesz.

Diák: Ha azonban megmaradunk kizárólag az inerciarendszereknél, akkor nem tudjuk vizsgálni az olyan rendszereket, mint amilyeknek pl. a gyorsuló liftben vagy a forgásban levő hengeren elhelyezett testekkel kapcsolatos feladatokban előfordulnak.

Tanár: Dehogynem. A koordináta-rendszer megválasztása kizárólag tőlünk függ. Ha a koordináta-rendszert a forgó hengerhez rögzítjük (azaz gyorsuló rendszerként vizsgáljuk), akkor a testet nyugalmi helyzetben levőnek tekinthetjük. Ha azonban a Föld felszínéhez rögzített koordináta-rendszerben (azaz inerciarendszerben) vizsgáljuk a test mozgását, akkor a test alaphelyzetben körmozgást végez. Én ebben az esetben is feltétlenül az inerciarendszert tudom ajánlani.

Most pedig szíveskedjék nekem elmondani Newton második törvényét!

Diák: Newton második törvénye képlettel így fejezhető ki: $F = m \cdot a$, ahol F – a testre ható erő, m – a test tömege, a pedig a gyorsulás.

Tanár: A diákok által kedvelt rövid választ adta erre a kérdésre, azonban ezzel kapcsolatban lenne három kritikai észrevételem. Kettő közülük nem túl jelentős, egy azonban lényeges. Először is: nem az erő a gyorsulás következménye, hanem éppen ellenkezőleg, a gyorsulás az erő hatásának a következménye. Ezért logikusabb a törvényt a következő kifejezéssel felírni:

$$a = k \cdot \frac{F}{m} \tag{10}$$

ahol: k – arányossági tényező, amelynek az értéke a (10) kifejezésben szereplő mennyiségek mértékegységétől függ. Megjegyzem, hogy az Ön által felírt kifejezés egyáltalán nem tartalmaz ilyen arányossági tényezőt. A második észrevételem, hogy a test gyorsulá-

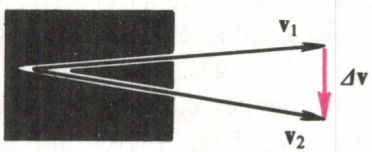
sát a reá ható erők együttesen határozzák meg. (Természetesen előfordulhat, hogy egyes erők kompenzálják egymást.) Tehát a törvény meghatározásában helyesebb lett volna nem az „erő", hanem a „hatóerők eredője" kifejezést használni.

A harmadik észrevételem a legjelentősebb. Newton második törvénye a hatóerők és a gyorsulás közötti összefüggést adja meg. Az erő és a gyorsulás azonban vektormennyiségek. Tehát a számértéken kívül irányukat is fel kell tüntetni. Megfogalmazásában szó sem esik az irányról. Ez pedig nagy hiba! Végeredményben ezzel hiányosan fogalmazta meg Newton második törvényét. A helyes meghatározás a következő: **egy test gyorsulása egyenesen arányos a testre ható erők eredőjével, fordítva arányos a test tömegével, iránya pedig az eredő erő irányával esik egybe.** Ezt a következő egyenlettel is felírhatjuk:

$$\mathbf{a} = k\mathbf{F}/m. \tag{11}$$

Diák: A 2. órán, amikor a vízszintessel szöget bezáró irányban eldobott testre ható erőket vizsgáltuk, azt tetszett ígérni, hogy Newton második törvénye kapcsán erre még visszatérünk és bemutatjuk, hogy a test mozgási iránya nem minden esetben esik egybe a rá ható erő irányával.

Tanár: Köszönöm, hogy emlékeztetett rá. Valóban most a legalkalmasabb erre visszatérni. Emlékszik még, mi a gyorsulás? Tudjuk, hogy **a gyorsulás a test egységnyi idő alatt bekövetkező sebességváltozását jelenti.** A 18. ábrán egy test $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ sebességvektorait tüntettük fel két közeli, t és $t+\Delta t$ időpontban.



18. ábra

A Δt idő alatt bekövetkező sebességváltozást a következő vektor adja: $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. A meghatározás szerint a gyorsulás a következőképpen fejezhető ki:

$$\mathbf{a}(t) \approx \Delta\mathbf{v}/\Delta t, \tag{12}$$

vagy pontosabb alakban felírva:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\mathbf{v}/\Delta t). \tag{13}$$

Ebből pedig az következik, hogy **a gyorsulásvektor iránya megegyezik az elegendően rövid idő alatt bekövetkezett Δv sebességváltozás-vektor irányával.** A 18. ábrából világosan kitűnik, hogy a sebességvektorok és a sebességváltozás-vektor teljesen eltérő irányúak lehetnek. Ez pedig egyben azt is jelenti, hogy **a gyorsulásvektor és a sebességvektor általános esetben szintén eltérő irányúak.** Érthető ez így?

Diák: Igen, érthető. Például körmozgásnál a test sebességének iránya a körpályához húzott érintővel esik egybe, míg a gyorsulás (a centripetális gyorsulásra gondolok) sugárirányban, a kör középpontja felé mutat.

Tanár: Tökéletesen idevágó példa. Most pedig térjünk vissza a (11) kifejezéshez és jegyezzük meg, hogy az erő irányával a gyorsulás, nem pedig a sebesség esik egybe, illetve, hogy az erő értékével is a gyorsulás, és nem a sebesség van összefüggésben. Másrészt viszont, a test mozgási sajátosságait egy adott pillanatban a pillanatnyi sebesség iránya és nagysága szabja meg (a sebességvektor mindig érintőleges a test pályájához).

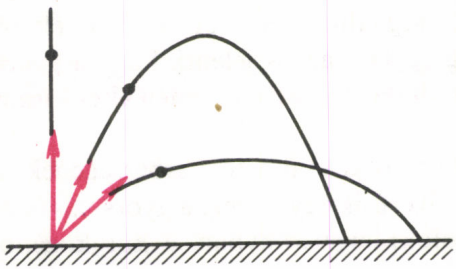
Mivel a gyorsulás és a sebesség két különböző vektor, ezért **általános esetben az erő és a test mozgási iránya egymástól eltérő is lehet,** tehát ebből következik, hogy egy adott pillanatban a test mozgási sajátosságait nem határozzák meg egyértelműen a reá ható erők.

Diák: Általános esetben ez a helyzet. De ugye az erő és a sebesség iránya egybe is eshet?

Tanár: Természetesen. Ha például felemelünk egy testet, és kezdősebesség nélkül egyszerűen elengedjük, akkor a test szabadesése közben annak mozgási iránya egybe fog esni a gravitációs erő irányával. Ha azonban a testtel egy vízszintes kezdeti sebességet közlünk, akkor a test mozgási iránya már nem esik egybe a gravitációs erővel, mert a test parabola mentén fog leesni. Annak ellenére tehát, hogy a test mozgása mindkét esetben egy és ugyanazon erő – a súly – hatása alatt megy végbe, a mozgás jellege a két esetben teljesen eltérő.

A fizikus azt mondaná erre, hogy a különbség az eltérő kezdeti feltételek eredménye: a mozgás kezdeti pillanatában a tesnek az egyik esetben nem volt sebessége, a másik esetben pedig egy meghatározott vízszintes sebességgel rendelkezett. A 19. ábra jól szemlélteti a különböző irányú kezdősebességgel eldobott testek pályái-

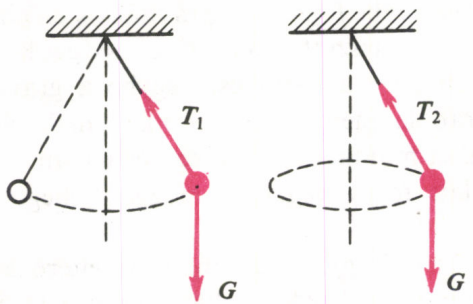
nak különbözőségét, pedig mindhárom esetben egyedül a súly az az erő, amely a testre hat.



19. ábra

Diák: Tehát, ha jól értem, **a test mozgási sajátosságait egy pillanatban nemcsak az adott időben rá ható erők, hanem a kezdeti feltételek is befolyásolják?**

Tanár: Tökéletesen így van. Ki kell emelnünk, hogy a kezdeti feltételek a test „előtörténetét" tükrözik, azaz a múltban a testre hatott erők eredményeként jönnek létre. Ezek az erők már nem működnek, de hatásuk eredménye még megmutatkozik. Mondhatjuk úgy is, hogy ebben fejeződik ki a múlt kapcsolata a jelennel. Ha Newton második törvényének matematikai kifejezése nem a gyorsulást, hanem a sebességet tartalmazná, akkor a múlt és a jelen kapcsolata a fenti módon nem jöhetne létre. Ebben az esetben a test sebességét egy adott pillanatban (azaz a mozgás sajátosságait egy adott pillanatban) teljes mértékben meghatároznák azok az erők, amelyek az adott időben hatnak a testre, és a múlt hatása a jelenben semmiben sem jutna kifejezésre.



a) *b)* 20. ábra

Szeretném még egy példával illusztrálni a fentieket. A 20. ábrán látható ingára két erő hat: a test súlya és a fonál húzóereje. Ha a testet kimozdítjuk nyugalmi helyzetéből és elengedjük, akkor

az lengő mozgást fog végezni. Ha azonban a testtel a kimozdítás síkjára merőleges irányú kezdősebességet közlünk, akkor az egy körív mentén egyenletes mozgást fog végezni. Amint látja, a test a kezdeti feltételektől függően vagy leng (20. *a)* ábra), vagy pedig körmozgást végez (20. *b)* ábra), holott mindkét esetben ugyanazok az erők hatnak rá, nevezetesen a súly és a fonál feszítőereje.

Diák: A Newton-törvények ilyen jellegű alkalmazásával nem találkoztam még.

Tanár: A felvételizők nagy része nemigen gondolja át kellően ezeket a jelenségeket, ezért aztán a testre ható erők meghatározását gyakran a test mozgási sajátosságaiból, nem pedig abból kiindulva végzi, hogy mely testek állnak a vizsgált testtel kölcsönhatásban. Ha még emlékszik rá, maga is hasonló módon kezdte a feladatot. Pontosan ez az oka, hogy amikor a 8. *c)* és 8. *d)* ábrát rajzolta, akkor azt hitte, hogy a testre ható erőknek a két esetben összefüggésében különbözni kell egymástól, holott valóságban mindkét esetben a súly és a fonál húzóereje hat a testre.

Diák: Most már értem, hogy egy és ugyanazon erők együttesen eltérő mozgási formákat eredményezhetnek. Ezért nem tekinthetjük a test mozgásmódját kiindulási alapnak az adott testre ható erők meghatározásához.

Tanár: Ön igen pontosan fejezte ki ezt a gondolatot. Nem szabad azonban itt sem végletekbe esni! Igaz, hogy ugyanazon erők együttese különféle mozgási formákhoz vezethet (mint pl. a 20. ábrán is), azonban az eltérő mozgási formák esetén a hatóerők közötti számszerű arányok különbözőek. Ez azt jelenti, hogy az eltérő mozgási formák esetén különböző lesz a hatóerők eredője. Így pl. a test egyenletes körmozgása esetén az eredő erőnek centripetálisnak kell lennie, míg a lengő mozgás esetén visszatérítő mozgatóerő marad kiegyenlítetlen. Ebből az következik, hogy bár a test mozgási formája nem szolgálhat kiindulási alapul a hatóerők megállapításához, azonban annak ismerete egyáltalán nem felesleges.

Ezzel kapcsolatban térjünk vissza a 20. ábrához. Tegyük fel, hogy ismert a függőleges és a kötél által bezárt α szög és a test G súlya. Számítsuk ki a fonálra ható T feszítőerőt, ha:

1. A test a lengő mozgás során a maximális amplitúdóval tér ki, illetve, ha 2. a test egyenletes körmozgást végez.

Az első esetben az eredő erő a visszatérítő, amely merőleges a fonálra. Ezért a test G súlyát az eredő erővel megegyező és arra

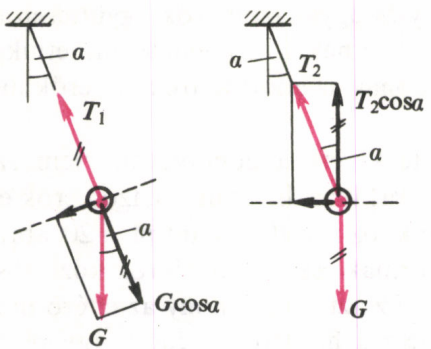
merőleges irányú (azaz a kötél irányával egybeeső) összetevőre kell felbontani, és a kötél irányában ható erőket egyenlővé kell egymással tenni (lásd 21. *a)* ábra). Ebből

$T_1 = mg \cos \alpha$.

A második esetben az eredő erő centripetális, amely vízszintes irányban mutat. Ezért a fonál T_2 húzóerejét vízszintes és függőleges összetevőre kell felbontani és az eredő erőre merőleges erőket (azaz a függőleges irányúakat) egyenlővé kell egymással tenni (21. *b)* ábra), azaz:

$T_2 \cos \alpha = mg$ vagy $T_2 = mg/\cos \alpha$.

Ily módon megkaptuk a fonál reakcióerejét. A feszítőerő nagysága azonos ezzel, de ellentétes irányú.
Láthatja, hogy a mozgás fajtájának ismerete jól jött a fonál feszítőerejének meghatározásakor.



a) *b)* 21. ábra

Diák: Ha jól értettem, akkor **a testek kölcsönhatásának ismeretében meghatározhatjuk a testre ható erőket, majd a hatóerők és a kezdeti feltételek ismeretében előre meg tudjuk mondani a test mozgási formáját, azaz a test sebességének nagyságát és irányát bármely időpontban. Másrészt viszont, a test mozgási fajtájának ismeretében meghatározhatjuk a testre ható erők közötti összefüggést.** Jól értelmezem?

Tanár: Igen, értelmezése helyes, mehetünk tovább. Feladnék egy egyszerű példát Newton második törvényével kapcsolatban:

Egy M és egy m tömegű testet azonos magasságra emelünk és egyszerre elengedünk. Egyszerre fog-e leesni a két test, ha a levegő közegellenállása mindkét test esetében azonos? Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy ez a súrlódási erő állandó értékű.

Diák: Mivel a levegő ellenállásából adódó súrlódási erő mindkét test esetén azonos, ezért azt figyelmen kívül hagyhatjuk. Tehát mindkét test egyszerre ér földet.

Tanár: Téved! A levegő ellenállását nem hagyhatjuk figyelmen kívül. Nézzük az M tömegű testet! Erre az Mg súly és az F súrlódási erő hat. E két erő eredője: $(Mg-F)$. Ebből a gyorsulás:

$$a = \frac{Mg-F}{M} = g - \frac{F}{M}$$

Tehát a nagyobb tömegű test gyorsulása is nagyobb, és így előbb ér földet.

Még egyszer szeretném hangsúlyozni, hogy **egy test gyorsulásának számításakor a testre ható összes erőt figyelembe kell venni,** azaz meg kell keresnünk az erők eredőjét.

Ezzel kapcsolatban álljunk meg egy pillanatra a „mozgatóerő" kifejezésnél. Ez a kifejezés nem éppen sikeres. Ha ezt valamely erőre (vagy erőkre) alkalmazzuk, akkor úgy tűnik, hogy ennek az erőnek (vagy erőknek) kitüntetett szerepet tulajdonítottunk a testtel közölt gyorsulás folyamatában. Azt gondolhatnánk tehát, hogy a többi erő kevésbé fontos. Ez pedig egyáltalán nem igaz. A test mozgása a reá ható összes erő együttes hatásaként jön létre (természetesen a kezdeti feltételek figyelembevételével).

Most pedig nézzünk egy példát Newton harmadik törvényére! Egy kocsit egy ló nyugalmi helyzetéből mozdít el. Az erőhatás következtében mind a ló, mind pedig a kocsi meghatározott gyorsulásra tesz szert. Newton harmadik törvényéből következik, hogy amilyen erővel a ló húzza a kocsit, ugyanolyan erővel hat a kocsi is a lóra, csak éppen ellentétes irányban. Magyarázza meg, hogyan lehetséges, hogy a ló és a kocsi mégis gyorsuló mozgást végez?

Diák: Ezen a kérdésen még sohasem gondolkoztam, de nem látok benne semmi nehézséget. A gyorsulás magyarázata akkor ütközne nehézségbe, ha a lónak a kocsira gyakorolt vonóerejét a kocsi reakciója kiegyenlítené. Ez a két erő azonban képtelen egymást kiol-

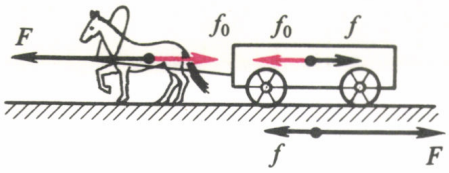
tani, mivel ezek két különböző tárgyra hatnak, nevezetesen az egyik a lóra, a másik pedig a kocsira.

Tanár: Magyarázata arra az esetre érvényes, amikor a ló nincs befogva kocsiba, azaz induláskor a ló elrugaszkodik a kocsitól, a kocsi ettől elindul az egyik irányba, a ló pedig ellenkező irányba. Az én kérdésem azonban arra az esetre vonatkozott, amikor a ló a kocsihoz van kapcsolva, és egységes rendszerként mozog vele együtt. A kocsi és a ló kölcsönhatásaként jelentkező fenti erők egy és ugyanazon rendszer eltérő részegységeire hatnak tehát, és ha a rendszer mint egységes egész mozgását vizsgáljuk, akkor ezek az erők kölcsönösen kioltható egymást. Ily módon tehát az előbbi kérdésem még megválaszolatlan.

Diák: Akkor én egyszerűen nem értem, mi lehet ennek az oka. Előfordulhat, hogy a hatást ez esetben nem kompenzálja teljes mértékben az ellenhatás? Végső soron a ló mégiscsak egy élő szervezet...

Tanár: Hagyjuk a fantáziát! Egy nehézségbe ütközött, és máris hajlandó lenne feláldozni a mechanika egyik alapvető törvényét!? A kérdésre a válasz megadható anélkül, hogy „revízió alá vennénk" Newton harmadik törvényét. Ellenkezőleg, ebből a törvényből kiindulva kell a vizsgálódást elvégezni.

Newton harmadik törvénye értelmében a ló és a kocsi kölcsönhatása nem hozhatja mozgásba ezt a rendszert mint egységes egészet (pontosabban szólva: nem közölhet az egységes rendszerrel gyorsulást). Ez esetben pedig léteznie kell egyéb kölcsönhatásnak is. Más szavakkal: a lovon és a kocsin kívül legalább még egy testnek szerepelnie kell a feladatban. Ez a harmadik test pedig jelen esetben a Föld. Tehát végeredményben nem egy, hanem három kölcsönhatással állunk szemben: 1. a ló és a kocsi kölcsönhatásával (jelöljük ezt az erőt f_0-lal); 2. a ló és a Föld kölcsönhatásával (a ló F erővel rugaszkodik el a Föld felszínétől); és 3. a kocsi és a Föld kölcsönhatásával (f a kocsi és a Föld felszíne közötti súrlódási erő). A 22. ábra mutatja a három testet – ló, kocsi, Föld –, illetve a rájuk ható két-két erőt, mint az adott testnek a másik két testtel végbemenő kölcsönhatása eredményét! A „ló-kocsi" rendszer gyorsulását a rendszerre ható összes erők eredője adja. A rendszerre négy erő hat, az eredőjük pedig $F-f$ értékű. Ez az eredő okozza a vizsgált rendszer gyorsulását. Láthatja, hogy ez a gyorsulás semmiféle kapcsolatban nincs a kocsi és a ló kölcsönhatásával.



22. ábra

Diák: Tehát úgy néz ki a dolog, hogy a Föld felülete nem egyszerűen az egyes események színhelye, hanem az események „aktív" résztvevője is.

Tanár: Ez az észrevétel teljesen jogos és helytálló. Van egy látványos bizonyíték is erre. Ha a kocsit és a lovat ideális jégen képzeljük el – kizárva ezzel rendszerünk és a Föld vízszintes irányú kölcsönhatásának lehetőségét – a rendszer nem képes mozgásba lendülni.

Ismételten hangsúlyozom: **egy adott rendszerrel semmiféle, a rendszeren belüli kölcsönhatás nem képes gyorsulást közölni, ehhez feltétlenül külső erő hatása szükséges (saját magunkat nem vagyunk képesek hajunknál fogva felemelni!).** Ez igen fontos gyakorlati következménye Newton harmadik törvényének.

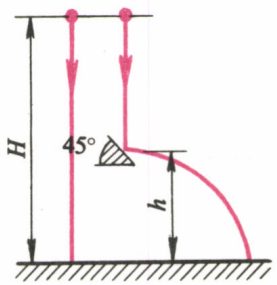
5. NÉZZÜNK NÉHÁNY KINEMATIKAI PÉLDÁT!

Tanár: Tegyük fel, hogy egy bizonyos magasságból két test esik lefelé. Az egyik nulla kezdősebességgel indul, a második pedig bizonyos nagyságú, vízszintes irányú sebességgel kezd esni. A levegő ellenállását elhanyagoljuk. Hasonlítsa össze kérem, a két test esési idejét!

Diák: A vízszintesen eldobott test mozgását vizsgálhatjuk a vízszintes és függőleges összetevőkre felbontva. Az esési időt a függőleges összetevő adja. Mivel a függőleges elmozdulásra mindkét esetben ugyanazok az adatok jellemzők (ugyanaz az esési magasság, és a kezdeti sebesség függőleges irányú összetevője nulla), ebből következik, hogy mindkét test esési ideje azonos és egyenlő $\sqrt{2H/g}$-vel, ha H a kezdeti magasság.

Tanár: Válasza tökéletes. Most pedig lássunk egy összetettebb feladatot!

Tegyük fel, hogy mindkét test azonos H magasságból esik kezdeti sebesség nélkül, azonban esés közben az egyik a vízszintessel 45°-os szöget bezáró lejtőbe ütközik, és attól elpattanva a test vízszintesen folytatja mozgását (23. ábra). A lejtővel való ütközés magassága h. Számítsuk ki a két test esési idejét!



23. ábra

Diák: A lejtőig az utat mindkét test azonos idő alatt teszi meg. Az ütközés következtében a második test vízszintes irányú sebességi összetevőre tesz szert. A sebesség vízszintes irányú összetevője

azonban nincs kihatással a függőleges irányú elmozdulásra. Ebből pedig az következik, hogy a két test esési ideje ebben az esetben is azonos lesz.

Tanár: A megoldás így nem jó. Igaza van abban, hogy a sebesség vízszintes összetevője nincs hatással a függőleges irányú elmozdulásra. A lejtővel való ütközés eredményeként azonban a test nemcsak vízszintes sebességre tesz szert, hanem az ütközés pillanatában elveszíti függőleges sebességét, aminek viszont kifejezésre kell jutnia az esési időben. Ez azt jelenti, hogy az ütközés h magasságából a második test nulla kezdősebességgel folytatja függőleges esését. A lejtő a lefékezéssel megnöveli a test esési idejét. Az ütközés nélkül leeső első test esési ideje $\sqrt{\frac{2H}{g}}$, míg a lejtővel ütköző második testé $\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}+\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Ezzel kapcsolatban szeretnék feltenni egy kiegészítő kérdést. Milyen H és h arányok esetén lesz a test esési ideje maximális? Más szavakkal: milyen magasságban kell a lejtőt elhelyezni, hogy az a leghosszabb időre tartsa vissza a testet?

Diák: Elég nehéz erre pontos választ adnom. Úgy gondolom, hogy a h/H arány nem lehet sem egyhez, sem pedig nullához közeli érték, mert ha vesszük az 1 vagy a 0 határeseteket, ez azt jelenti, hogy a test útjában egyáltalán nincs akadály. Valószínű, hogy a lejtőt valahol az út közepe környékén kell elhelyezni.

Tanár: Kvalitatíve helyesen értelmezi a feladatot. De nem nehéz kiszámítani a pontos megoldást sem. A test esési idejére írhatjuk:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right),$$

ahol: $x = h/H$.

Keressük x-nek azt az értékét, amelynél a $t(x)$ függvény értéke maximális. Emeljük négyzetre az esési időt:

$$t^2 = \left(\frac{2H}{g}\right)\left(1+2\sqrt{(1-x)x}\right).$$

Az esési idő maximuma egybeesik a függvény négyzetének maximumával. Ebből a kifejezésből pedig világos, hogy t^2 értéke ott maximális, ahol az $y = (1-x)x$ függvényt eléri a maximumot. Ily módon tehát a feladat egy másodfokú függvény maximumvizsgálatára korlátozódik.

Az $y = -x^2+x = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ függvény értéke az $x = \frac{1}{2}$ helyen éri el a maximumot. Tehát h értékénél $H/2$-vel kell egyenlőnek lennie.

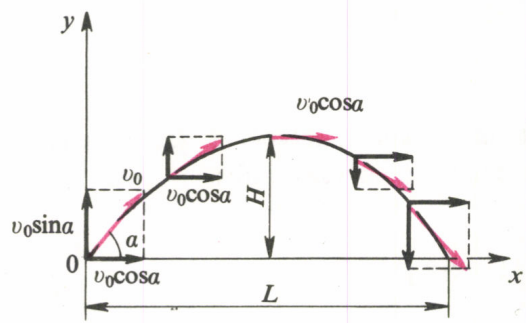
A továbbiakban a kinematikai feladatok jellegzetes vonásait a vízszintessel bizonyos szöget bezáró irányban eldobott test példáján vizsgáljuk meg.

Diák: Ezeket a feladatokat én nem egészen értem.

Tanár: Kezdjük egy szokásos feladattal!

A testet egy v_0 kezdősebességgel α szögben eldobtuk. Határozzuk meg a T repülési időt, a H maximális repülési magasságot és az L távolságot, ahol a test földet ér.

A feladat megoldását itt is azzal kell kezdeni, hogy feltüntetjük a testre ható erőket. **A testre csak a gravitációs erő hat, ezért vízszintes irányban egyenletesen mozog, függőleges irányban pedig g értékkel lassuló, majd gyorsuló mozgást végez.** A test mozgását vízszintes és függőleges összetevőire felbontva, a két irányban külön vizsgáljuk. Ehhez a kezdeti sebességet felbontjuk egy $v_0 \sin\alpha$ értékű függőleges és egy $v_0 \cos\alpha$ értékű vízszintes irányú összetevőre. A sebesség vízszintes irányú összetevője a teljes repülési idő alatt azonos marad, míg a függőleges irányú összetevő állandóan változik, ahogyan azt a 24. ábra szemlélteti. Nézzük meg a függő-



24. ábra

leges irányú összetevő változását. Ha az emelkedési időt T_1-gyel jelöljük (itt függőleges irányú elmozdulás egyenletesen lassuló), az esési időt pedig T_2-vel (itt a függőleges irányban a test egyenletesen gyorsuló mozgást végez), akkor a teljes repülési idő: $T = T_1 + T_2$. A pálya legmagasabb pontjában (a $t = T_1$ pillanatban) a sebesség függőleges irányú összetevője természetesen nullával egyenlő. Ezt az értéket megkaphatjuk az egyenletesen lassuló mozgás sebességének kifejezéséből:

$$0 = v_0 \sin \alpha - gT_1,$$

$$\text{vagy} \qquad T_1 = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} . \tag{14}$$

T_1 ismeretében számíthatjuk H értékét:

$$H = (v_0 \cdot \sin \alpha) \cdot T_1 - g\frac{T_1^2}{2} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g} . \tag{15}$$

A T_2 esési időt a H magasságból nulla kezdősebességgel eső testre érvényes kifejezés adja:

$$T_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} .$$

Összehasonlítva ezt a (14) egyenlettel, látjuk, hogy az esési idő megegyezik az emelkedési idővel. A teljes repülési idő pedig:

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} . \tag{16}$$

A repülés L távolságát a test elmozdulásának vízszintes összetevője alapján kapjuk. Már említettük, hogy a test vízszintes irányban egyenletes sebességgel mozog. A teljes repülési idő alapján a távolság:

$$L = (v_0 \cdot \cos \alpha) \cdot T = \frac{v_0 \cdot \sin 2\alpha}{g} . \tag{17}$$

A (17) kifejezésből kitűnik, hogy amennyiben két test hajítási szögének összege 90°-ot tesz ki, akkor – azonos kezdősebességek esetén – azok egy pontban érnek földet.

Diák: Szeretnék kérdezni valamit a feladatban szereplő test pályájával kapcsolatban. Mi azt tanultuk, hogy ez a pálya egy parabola. Be lehet ezt bizonyítani?

Tanár: Természetesen. Vizsgáljuk meg a test elmozdulását a 24. ábrán bemutatott koordináta-rendszerben. A sebesség vízszintes és függőleges irányú összetevőit már meghatároztuk, így az x és y irányú elmozdulásokat közvetlenül felírhatjuk:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t.$$
$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (18)$$

A két egyenlet összevonásával az

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x \qquad (18.\ a)$$

kifejezést kapjuk, amely valóban egy parabolát ír le.

Diák: Az Ön által felírt (18) egyenlet egyenletesen lassuló mozgást ír le. Viszont a test a leszálló ágon már egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Erre az esetre is érvényes a (18) egyenlet?

Tanár: Igen, érvényes. Győződjünk meg erről! Jelöljük a pálya legmagasabb pontját y_0-lal és τ-val azt az időt, amelyet a testnek ezen a ponton való áthaladásától számítunk. Könnyen belátható, hogy a leszálló ágon:

$$y_0 - y = \frac{g\tau^2}{2} \cdot$$

és ez gyorsulást ír le. Mivel azonban

$$\tau = t - T_1 = t - \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \text{ és } y_0 = H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

tehát:

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} - y = \frac{g}{2}\left(t - \frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2,$$

azaz $y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$.

Minden érthető ebben a feladatban?

Diák: Igen, most már értem.

Tanár: Akkor vegyünk egy nehezebb példát!

Tegyük fel, hogy az eldobott testre a mozgással egyirányú szél egy állandó értékű, vízszintes F erővel hat. A test súlya G. Számítsuk ki ismét a T repülési időt, a H magasságot és az L távolságot!

Diák: Az előző feladattól eltérően, itt a vízszintes irányú mozgás már nem egyenletes, hanem $a = F/M$ gyorsulással megy végbe.

Tanár: És a függőleges irányú összetevővel van valami változás?

Diák: Mivel a szél vízszintes irányban hat, a függőleges elmozdulást ez nem befolyásolhatja.

Tanár: Igen. Most pedig mondja meg, hogy a keresett értékek közül melyek azok, amelyek az előző feladathoz képest nem változnak!

Diák: Világos, hogy a T repülési idő és a H magasság, hiszen ezeket az értékeket a függőleges elmozdulás alapján határoztuk meg. Tehát ezek megegyeznek az előző feladatban számított értékekkel.

Tanár: Nagyon helyes. Nem maradt más hátra, mint a repülési távolság meghatározása.

Diák: A vízszintes irányú gyorsulás és a repülési idő ismeretében a repülési távolság:

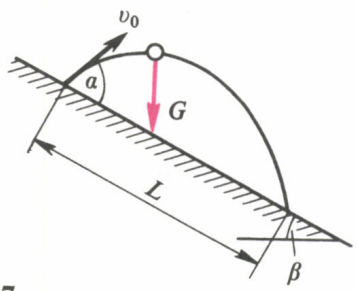
$$L = v_0 \cos\alpha \cdot T + \frac{aT^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha + 2\frac{F}{Mg^2} v_0^2 \sin^2\alpha.$$

Tanár: Helyes, de célszerűbb ezt a kifejezést átírni a következő alakra:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\left(1 + \frac{F}{Mg}\operatorname{tg}\alpha\right). \tag{19}$$

Most pedig nézzük egy másik feladatot!

Az M tömegű testet egy lejtős terepen, a lejtő síkjára α szög alatt dobjuk el, maga a lejtő pedig a vízszintessel β szöget zár be (25. ábra). A test kezdősebessége v_0. Határozzuk meg az L repülési távolságot!



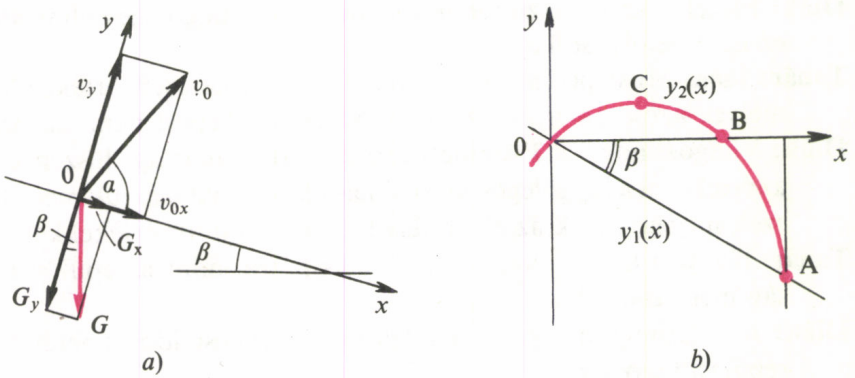
25. ábra

Diák: Egyszer én már próbálkoztam hasonló feladat megoldásával, de sajnos akkor nem sikerült.

Tanár: Semmi közös vonást nem fedez fel ebben a feladatban és az előző, a széllel kapcsolatosban?

Diák: Sajnos, nem látom a közös vonást.

Tanár: Vegyük fel a lejtő irányával megegyező Ox és az arra merőleges Oy tengelyt (26. ábra), és a v_0 kezdősebességet bontsuk fel ilyen irányú összetevőire:



26. ábra

$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$

A G nehézségi erőt is erre a két irányra vetítve bontjuk fel:

$G_x = G \sin \beta, \quad G_y = G \cos \beta.$

Így már szembetűnő, hogy az előző feladathoz jutottunk, ahol a szél hatóerejét a $G \cdot \sin \beta$, míg a súlyerőt a $G \cdot \cos \beta$ helyettesíti. Tehát a keresett L távolság kiszámítása a (19) egyenlet alapján történhet, ha elvégezzük a következő helyettesítéseket:

$F \to Mg \sin \beta; \quad g \to g \cos \beta.$

Ekkor az L távolságra a következő kifejezést kapjuk:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g \cos \beta} \left(1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha \right). \tag{20}$$

Ha $\beta = 0$, akkor ez a kifejezés a (17)-be megy át.

Érdekes ennek a feladatnak egy másik megoldási módja is. Rajzoljunk fel egy xy derékszögű koordináta-rendszert. Az origója az el-

dobási pontban legyen (26. *b)* ábra). A lejtő egyenlete ebben a koordináta-rendszerben egy lineáris függvény lesz:

$$y_1 = -x \operatorname{tg} \beta,$$

a test röppályáját pedig egy parabola írja le:

$$y_2 = ax^2 + bx,$$

ahol: az a és b együtthatókat a v_0, α és β segítségével kell kifejezni. Határozzuk meg az y_1 és y_2 függvények A metszéspontjának x_A abszcisszáját. A metszéspontban a két függvény értéke megegyezik:

$$-x \operatorname{tg} \beta = ax^2 + bx.$$

Ebből kapjuk: $x_A = (\operatorname{tg} \beta + b)/(-a)$. x_A ismeretében könnyen meghatározható az $L = OA$ távolság:

$$L = \frac{x_A}{\cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta + b}{-a \cos \beta}.$$

Ezek után határozzuk meg az a és b koefficienseket v_0, α és β segítségével. Ehhez két segédpontot kell megvizsgálnunk a parabolán, a B és C pontokat. Mindkét pontra írjuk fel a parabola egyenletét:

$$y_{2C} = ax_C^2 + bx_C$$
$$y_{2B} = ax_B^2 + bx_B.$$

A B és C pont koordinátáit ismerjük, ezért az egyenletrendszerből egyszerűen kiszámíthatjuk a és b értékét. Javaslom, hogy ezt végezze el önállóan, és a megoldást hozza a (20) alakra.

Diák: Nekem valahogyan jobban tetszik az előző megoldás.

Tanár: Ez természetesen ízlés dolga. E kétféle megoldás jellegét tekintve teljesen eltér egymástól. Az első megoldási módot nevezhetnénk „fizikai"-nak, mivel **a fizikai eljárásokra jellemző modellezést alkalmaztuk (azaz, kissé más szemmel vizsgálva a feladatot, visszavezettük azt a korábbi, széllel kapcsolatos feladatra).** A második módszert „matematikai"-nak nevezhetjük, mivel ennél két függvény és azok metszéspontja alapján jutottunk el a megoldáshoz. Szerintem az első módszer valóban látványosabb, a második viszont sokkal általánosabb, széles körben alkalmazható. Így pl. elvileg használni tudjuk abban az esetben is, amikor a lejtő profilgörbéje történetesen nem egyenes. Ekkor az y_1 lineáris függvény szerepét a lejtő pro-

filját leíró valamilyen más függvény tölti be. Az első megoldási mód ez esetben elvileg sem alkalmazható. A matematikai módszerek elterjedését az segítette elő, hogy általuk tágabb tér nyílik az absztrahálásra.

Feladatok:

4. Az A testet 20 m/s kezdősebességgel függőlegesen feldobjuk. Milyen magasságban volt az a B test, amelyet az A testtel egyidőben dobtak el, de vízszintesen, 4 m/s kezdősebességgel, ha a két test repülés közben találkozik. A két test kezdeti helyzete között a vízszintes távolság 4 m. Határozzuk meg ezen kívül az ütközésig eltelt időt, és mindkét test sebességét is az ütközés pillanatában.

5. A 2 m magasságban levő A pontból és a 6 m magasságban levő B pontból egyszerre dobunk el egy-egy testet úgy, hogy röptükben találkozzanak: az A pontból 8 m/s kezdősebességgel vízszintesen, a B pontból pedig a vízszintessel 45°-ban lefelé. Az A és B pont közötti vízszintes távolság 8 m. Számítsuk ki a B pontból 45°-ban eldobott test v_0 kezdősebességét, az ütközési hely x és y koordinátáit, a testek t mozgási idejét az ütközésig, valamint azok v_A és v_B sebességét az ütközés pillanatában, ha a két test pályája azonos függőleges síkban fekszik.

6. Egy pontból két testet egyszerre dobtunk el a vízszintessel α_1 szög alatt és v_1 kezdősebességgel, illetve α_2 szögben v_2 sebességgel. Milyen távolságra lesz egymástól a két test t idő múlva? Két esetet vizsgáljunk: *1.* A röppályák azonos síkban fekszenek, és a testeket egymással ellentétes irányban dobtuk fel. *2.* A röppályák egymásra merőleges síkban fekszenek.

7. Egy test H magasságból kezdősebesség nélkül szabadon esik; h magasságban rugalmasan ütközik egy, a vízszintessel 30°-ot bezáró lejtővel. Számítsuk ki a test esési idejét!

8. Milyen α szögben kell eldobni egy M tömegű testet ahhoz, hogy a röppálya magassága a repülési távolsággal azonos legyen. A számítást annak feltételezésével végezzük, hogy állandó F erővel hátszél hat a testre.

9. A vízszintessel β szöget bezáró lejtőn, a lejtő síkjára merőlegesen, v_0 kezdősebességgel eldobunk egy követ. Az eldobási ponttól milyen távolságra esik le a kő?

10. Egy 1,5 m magasságú fiú 15 m távolságra áll egy 5 m magas

kerítéstől és 45°-ban követ dobál. Minimálisan mekkora kezdősebességgel kell eldobnia a követ, hogy az átrepüljön a kerítésen?

11. Egy golyót a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró irányban dobunk el $v_0 = 14$ m/s kezdősebességgel. Ettől a ponttól 11 m távolságra a golyó rugalmasan ütközik egy függőleges fallal. A faltól mért mekkora L távolságra esik le a golyó?

12. Egy testet a $H = 19{,}6$ m magasságon levő ponttól $v_0 = 10$ m/s kezdősebességgel vízszintesen eldobunk. A test rugalmasan ütközik a Földdel, majd az eldobás helyétől $l = 40$ m-re levő függőleges fallal. Határozzuk meg azt a h magasságot, amelyre a test a fallal való ütközés után fölemelkedik, illetve azt a faltól mért s távolságot, ahol a tárgy földet ér.

13. Egy $\beta = 30°$-os meredekségű lejtőn azonos $v = 14$ m/s állandó sebességgel halad fölfelé egy teherautó és mögötte egy személygépkocsi. A teherautó dupla hátsó kereke közé egy kő szorult. Minimálisan mekkora távolságra követheti a személygépkocsi a teherautót, hogy a kerekek közül kirepülő kő ne találja őt el?

6. NÉZZÜNK NÉHÁNY DINAMIKAI PÉLDÁT!

Tanár: A dinamikai feladatok megoldása során különösen fontos, hogy a testre ható erőket (lásd 2. óra) jól határozzuk meg.

Diák: Ezzel kapcsolatban kérdezhetnék valamit? Tegyük fel, hogy a testre ható összes erőt helyesen határoztam meg. Akkor a következő stádiumban mi a helyes eljárás?

Tanár: **Ha a hatóerők nem egy egyenes mentén helyezkednek el, akkor azokat két egymásra merőleges irányú összetevőre kell felbontani, majd az összetevőket az egyes irányokban külön-külön kell vizsgálni.** Ezeket „felbontási irányoknak" nevezhetjük. Rögtön adnék néhány gyakorlati tanácsot is. Először is az erők felbontását az ábrán nagy méretben tüntessük fel, ne sajnáljuk a papírt, mert ezzel elkerülhetjük azok összekeverését. Sajnos, a diákok rendszerint mikroszkopikus méretű nyilakkal ábrázolják az erőket. Hasonlítsa össze pl. a saját rajzát (8. ábra) az enyémmel (9. ábra)! A második tanácsom, hogy az erők felbontását nem szabad elhamarkodni. Először meg kell nézni, hogy milyen erők hatnak a testre és azokat kivétel nélkül fel kell tüntetni az ábrán. Csak ezután szabad megkezdeni az erők felbontását. A harmadik tanácsom, hogy ne feledkezzen meg arról, ha már egyszer valamely erőt összetevőire felbontott, akkor magát az erőt „el kell felejteni", és helyette csakis az összetevőkkel szabad számolni. Vagy magát az erőt, vagy csak az összetevőket vesszük figyelembe.

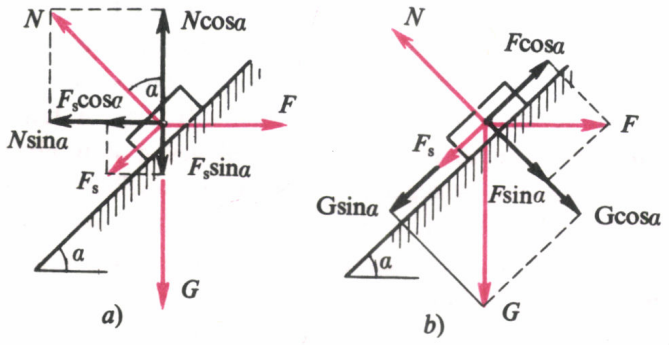
Diák: És milyen elv szerint válasszuk meg a felbontási irányokat?

Tanár: **A felbontási irányok megválasztásakor a test által végzett mozgás fajtáját kell alapul venni.** Kétféle eset lehetséges:

1. A test nyugalmi állapotban van, vagy egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez; 2. A test gyorsuló mozgást végez és a gyorsulás iránya ismert (legalábbis előjel pontossággal).

Az első esetben a felbontási irányokat tetszőlegesen választhat-

juk meg a gyakorlati szempontok figyelembevételével, vagy akár anélkül. Vegyük pl. a 10. ábrát, és mozogjon a test a lejtőn felfelé egyenletesen. Ekkor a felbontási irányokat megválaszthatjuk vízszintesnek és függőlegesnek (27. *a)* ábra), illetve a lejtő síkjával párhuzamosan, és merőlegesen (27. *b)* ábra) is, az eredmény azonos.



27. ábra

A felbontás után minden egyes felbontási irányra az összetevők algebrai összegét egyenlővé kell tenni nullával (ne feledjük, hogy egyelőre a gyorsulás nélkül mozgó testeket vizsgáljuk).

A 27. *a)* ábrán mutatott esetben a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} N\cos\alpha - F_s\sin\alpha - G &= 0,\\ F - F_s\cos\alpha - N\sin\alpha &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

A 27. *b)* ábra esetén pedig:

$$\left.\begin{aligned} N - G\cos\alpha - F\sin\alpha &= 0,\\ F_s + G\sin\alpha - F\cos\alpha &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Diák: De hisz ezek az egyenletrendszerek eltérőek!

Tanár: Igen, de nem nehéz meggyőződni róla, hogy azonos eredményt szolgáltatnak. Tegyük fel, hogy keressük azt az F erőt, amely a testet a lejtőn felfelé egyenletesen mozgatja. A (21) egyenletrendszerbe helyettesítve az (5) kifejezést, a következő alakot kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - G &= 0,\\ F - N(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből kifejezhetjük N értékét:

$$N = G(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)^{-1}.$$

Ezt a második egyenletbe behelyettesítve kapjuk:

$$F = G\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

Ugyanez az eredmény adódik akkor is, ha a (22) kifejezésből indulunk ki. Erről önállóan is könnyen meggyőződhet.

Diák: És mi a helyzet akkor, ha a test gyorsuló mozgást végez?

Tanár: Ez esetben az erők felbontási iránya a test gyorsulásának irányától (tulajdonképpen az eredő erő irányától) függ. **A felbontást tehát a gyorsulás irányában és arra merőlegesen kell elvégezni. Az összetevők algebrai összegét a gyorsulásra merőleges irányban nullával kell egyenlővé tenni, a gyorsulás irányában pedig az erre – Newton második törvénye szerint – egyenlő a test tömegének és gyorsulásának szorzatával.**

Most pedig vegyünk egy utolsó példát a lejtővel kapcsolatban, de most tételezzük fel, hogy a test a lejtőn gyorsuló mozgást végez. A korábbi észrevételeinknek megfelelően, az erők felbontását ugyan olyan módon kell elvégezni, mint a 27. *b)* ábrán. Ez esetben azonban a (22) kifejezés helyett a következőket kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} N - G\cos\alpha - F\sin\alpha &= 0,\\ F\cos\alpha - F_s - G\sin\alpha &= ma = G\frac{a}{g}. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

A test gyorsulását az (5) kifejezés felhasználásával kapjuk:

$$a = \frac{g}{G}[F\cos\alpha - (G\cos\alpha + F\sin\alpha)\mu - G\sin\alpha].$$

Diák: Ha a test gyorsuló mozgást végez, megtehetjük-e, hogy az erők felbontását nem a gyorsulás irányában, illetve arra merőleges irányban végezzük? Az Ön magyarázatából úgy tűnik, hogy ezt nem szabad csinálni.

Tanár: A kérdése kapcsán pontosítanom kell az előbbi magyarázatom. Gyorsulás esetén is jogunkban áll természetesen bármely, egymásra merőleges két irányban felbontani az erőket. Ebben az esetben azonban arra kényszerülünk, hogy az erőkön kívül még a gyorsulásvektort is felbontsuk. Ez a megoldási mód pedig további nehézségekkel jár. A bonyodalmak elkerülése érdekében végezze az erők felbontását az általam javasolt módon. Ez a legegyszerűbb eljárás. Mindig ismert a feladatból a gyorsulás iránya (legalábbis előjel

pontossággal) tehát ebből az irányból kell kiindulnunk. Legtöbb esetben azzal magyarázható a felvételi vizsgázók tehetetlensége, ha egy kicsit összetettebb dinamikai feladattal kerülnek szembe, hogy nem képesek célszerűen megválasztani az erők felbontási irányát.

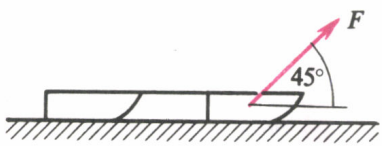
Diák: Mi eddig állandóan a két irányú felbontásról beszéltünk. Általános esetben azonban bizonyára három egymásra merőleges irányban kell az erőket felbontani, mert hiszen a tér maga is három irányú kiterjedéssel bír.

Tanár: Tökéletesen igaza van. Az eddigiekben azért beszéltünk csupán két irányról, mert csak síkbeli feladatokat vizsgáltunk. Általános esetben valóban három irányban kell a felbontást végezni. A fenti észrevételek természetesen ott is érvényesek maradnak. Persze meg kell mondanom, hogy a felvételi vizsgákon általában csak síkbeli feladatok fordulnak elő. Ennek ellenére néhány egyszerűbb térbeli feladattal esetleg találkozhatunk.

Feladatok:

14. A vízszintes síkban egy 5 kg-os test mozog, amelyre a vízszintessel 30°-os szögben 3 kp erő hat. A csúszó súrlódási együttható értéke 0,2. Számítsuk ki a test sebességét az erő hatásától számított 10 s múlva, és a súrlódási munkát ugyanezen idő alatt!

15. Egy ember két, egymás után kötött szánkót húz a vízszintessel 45°-os szögben $F = 12$ kp hatóerővel (28. ábra). A két szánkó



28. ábra

tömege azonos: $m_1 = m_2 = 15$ kg. A talpak és a hó közötti súrlódási együttható értéke 0,02. Számítsuk ki a szánkók gyorsulását és a két szánkó között kötélre ható feszítőerőt, és hogy milyen erővel kell húzni a kötelet, hogy a két szánkó egyenletesen mozogjon.

16. Egy állócsigán át kötél van felfüggesztve és rajta 3 db, egyenként 2 kg tömegű nehezék a 29. ábra szerinti elrendezésben. Számítsuk ki a rendszer gyorsulását és az 1. és 2. nehezékeket összekötő kötélre ható feszítőerőt!

17. Számítsuk ki a nehezékek gyorsulását és a kötelekre ható feszítőerőt a 30. ábrán bemutatott esetben, ha $\alpha = 30°$, $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 8$ kg! A lejtőn való súrlódást elhanyagolhatjuk.

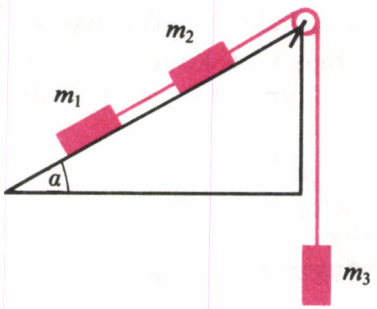
18. Adva van a 31. ábrán jelölt rendszer. Ismert: $M_1 = 1$ kg, $M_2 = 2$ kg, $M_3 = 5$ kg, $M_4 = 0{,}5$ kg, $\alpha = 30°$. A csúszó súrlódási együttható 0,2. Számítsuk ki a rendszer gyorsulását, a kötélszakaszokra ható feszítőerőket és azt az erőt, amellyel az M_4 súly az M_3 súlyra hat.

19. Két azonos tömegű súlyt egy súlytalan csigán átvetett kötél köt össze. A súlyok maguk a vízszintessel α, illetve β szöget alkotó lejtőn fekszenek (32. ábra). Számítsuk ki a súlyok a gyorsulását és a kötélre ható feszítőerőt! A súrlódási együttható mindkét súly esetében μ. Mekkora μ_1 súrlódási együttható esetén maradnak a súlyok nyugalmi helyzetben?

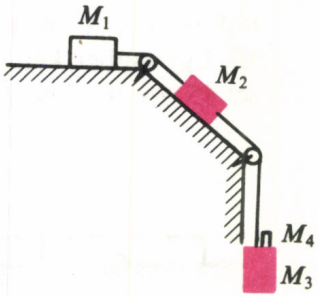
20. Az $\alpha = 30°$ meredekségű lejtőn egy 3 kg tömegű deszka fekszik. A deszkára a 33. ábrán jelölt módon $F = 1$ kp erő hat. Határozzuk meg a deszka gyorsulását és a súrlódási erőt, ha a súrlódási együttható értéke: $\mu = 0{,}3$!

21. A 0,3 meredekségű jeges lejtőn a szánkót legalább 60 N erővel kell visszatartanunk. Ha elengedjük, $a = 2$ m/s^2 gyorsulással mo-

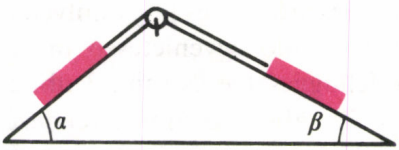
29. ábra



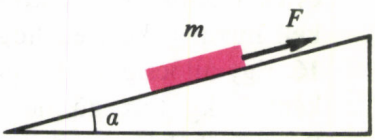
30. ábra



31. ábra



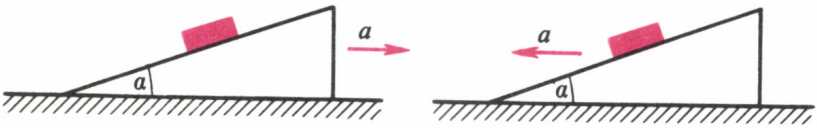
32. ábra



33. ábra

zog lefelé. Mekkora F_1 erővel kell a szánkóra hatni, ha azt akarjuk, hogy az a lejtőn fölfelé egyenletesen haladjon?

22. Egy deszkadarab az α meredekségű lejtőn található. A súrlódási együttható: μ. Az a gyorsulás mekkora értékeinél csúszik meg a



a) *b)*

34. ábra

deszka a lejtőn, ha ez utóbbi a 34. ábrán jelölt irányokba mozdul el a gyorsulással?

23. A vízszintes síkon egy M_2 tömegű tábla, azon viszont egy M_1 tömegű deszka fekszik. A deszka és a tábla között a súrlódási együttható értéke μ_1, a tábla és a sík között pedig μ_2. Minimálisan mekkora vízszintes irányú F erővel kell a táblára hatni ahhoz, hogy azon a deszka megcsússzon?

7. MENNYIRE NEHEZÍTI MEG A DINAMIKAI FELADATOK MEGOLDÁSÁT A SÚRLÓDÁS FIGYELEMBEVÉTELE?

Tanár: A súrlódási erő figyelembevétele igen bonyolulttá teheti a feladatokat.

Diák: Korábban már megtárgyaltuk (3. óra) a súrlódási erőt. **Ha a test mozgásban van, akkor a súrlódási erőt a felületre merőleges nyomóerő segítségével határozzuk meg ($F_s = \mu N$), ha pedig nyugalomban van, akkor a súrlódási erő nagysága megegyezik azzal az erővel, amely igyekszik őt nyugalmi helyzetéből kimozdítani.** Mindezt nem nehéz megérteni és megjegyezni.

Tanár: Ez igaz, azonban figyelmen kívül hagy egy jelentős tényezőt. Feltételezi, hogy előre ismeretes a következő kérdésekre adandó válasz: 1. A test nyugalomban van vagy mozgásban, illetve 2. milyen irányban mozog a test. Ha ezekre a válasz ismert, akkor valóban viszonylag egyszerű a helyzet. Ha azonban a válasz nem ismert, akkor a feladat rögtön nehezebbé válik, és kiegészítő vizsgálatokat kell lefolytatni.

Diák: Most kezdek rá emlékezni. Egy keveset beszélgettünk erről a 2. órán a súrlódási erő irányának megválasztásával kapcsolatban.

Tanár: Igen, de most álljunk meg ennél a kérdésnél kissé hosszabb időre. Én állítom, hogy azt a nehézséget, amelyet a súrlódási erő figyelembevétele jelent a dinamikai feladatok megoldásában, aláértékelik mind a diákok, mind pedig az egyes feladatokat összeállító tanárok.

Vizsgáljuk meg a 10. ábrán bemutatott példát. Ismert a lejtő α hajlásszöge, a test G súlya, az F erő és a μ súrlódási együttható. Az egyszerűség kedvéért elfogadjuk, hogy $\mu_0 = \mu$ (ha μ_0 a nyugalmi súrlódási együttható maximálisan lehetséges értéke). Határozzuk meg, hogy a test milyen fajta mozgást végez, és számítsuk ki a gyorsulást.

Tételezzük fel, hogy a test a lejtőn felfelé mozog. Bontsuk fel az erőket oly módon, ahogyan azt a 27. *b)* ábra mutatja és használjuk fel a 6. órán a gyorsulásra kapott kifejezést:

$$a = \frac{g}{G}[F\cos\alpha - G\sin\alpha - (G\cos\alpha + F\sin\alpha)\mu] \tag{24}$$

A (24) kifejezés alapján a test a lejtőn felfelé akkor mozoghat, ha teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$F\cos\alpha - G\sin\alpha - (G\cos\alpha + F\sin\alpha)\mu \geqq 0.$$

Rendezzük át ezt a következő alakra:

$$F \geqq G\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha},$$

illetve

$$F \geqq G\frac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha}. \tag{25}$$

Tételezzük fel, hogy a lejtő meredeksége nem túl nagy, azaz $(1 - \mu\operatorname{tg}\alpha) > 0$, vagyis

$$\operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{\mu}. \tag{26}$$

Most pedig tegyük fel, hogy a test a lejtőn lefelé mozog. Bontsuk fel az erőket a 27. *b)* ábrán feltüntetett módon, a súrlódási erőt azonban vegyük ellentétes irányúnak. A test gyorsulására a következő kifejezést kapjuk:

$$a = \frac{g}{G}[G\sin\alpha - F\cos\alpha - (G\cos\alpha + F\sin\alpha)\mu]. \tag{27}$$

A (27) kifejezés alapján a test akkor mozog a lejtőn lefelé, ha teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$G\sin\alpha - F\cos\alpha - (G\cos\alpha + F\sin\alpha)\mu \geqq 0.$$

Rendezzük ezt a következő alakra:

$$F \leqq G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha},$$

illetve:

$$F \leqq G \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}. \tag{28}$$

Tételezzük fel, hogy a lejtő meredeksége nem túl kicsi, azaz

$(\operatorname{tg} \alpha - \mu) > 0$, vagyis

$$\operatorname{tg} \alpha > \mu. \tag{29}$$

A (25), (26), (28) és (29) kifejezések összegezéseként levonhatjuk a következő tanulságokat:

1. Teljesüljön a lejtőre a következő feltétel:

$$\mu < \operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{\mu},$$

akkor:

a) ha $F > G(\mu + \operatorname{tg} \alpha)/(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$, akkor a test a lejtőn felfelé mozog a (24) kifejezés szerinti gyorsulással;
b) ha $F = G(\mu + \operatorname{tg} \alpha)/(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$, akkor a test egyenletesen mozog felfelé, vagy pedig nyugalomban van;
c) ha $F < G(\operatorname{tg} \alpha - \mu)/(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)$, akkor a test a lejtőn lefelé mozog a (27) kifejezés szerinti gyorsulással;
d) ha $F = G(\operatorname{tg} \alpha - \mu)/(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)$, akkor a test egyenletesen mozog lefelé, vagy pedig nyugalomban van;
e) ha $G(\operatorname{tg} \alpha - \mu)/(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) < F < G(\mu + \operatorname{tg} \alpha)/(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$, akkor a test nyugalomban van.

Itt jegyezzük meg, hogy miközben az F erő nagysága a $G(\operatorname{tg} \alpha - \mu)/(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)$ értéktől a $G(\mu + \operatorname{tg} \alpha)/(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$ értékre növekszik, a nyugalmi súrlódási erő nagysága a $\mu(G \cos \alpha +$

$+F \sin \alpha$) értékről fokozatosan nullára csökken, majd – irányát 180°-ra megváltoztatva – a nullától a $\mu(G \cos \alpha + F \sin \alpha)$ értékig nő. Ezalatt a test mindvégig nyugalomban marad.

2. Teljesüljön a lejtőre a következő feltétel:

$$0 < \operatorname{tg} \alpha \leqq \mu,$$

akkor:

a) ha $F > G(\mu + \operatorname{tg} \alpha)/(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$, akkor a test felfelé mozog a (24) kifejezés szerinti gyorsulással;

b) ha $F = G(\mu + \operatorname{tg} \alpha)/(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$, akkor a test egyenletesen mozog lefelé, vagy pedig nyugalomban van.

c) ha $F < G(\mu + \operatorname{tg} \alpha)/(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$, akkor a test nyugalomban van. A test a lejtőn ez esetben nem képes lefelé mozogni még akkor sem, ha $F = 0$.

3. Teljesüljön a lejtőre a következő feltétel:

$$\operatorname{tg} \alpha \geqq \frac{1}{\mu},$$

akkor:

a) ha $F < G(\operatorname{tg} \alpha - \mu)/(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)$, akkor a test a lejtőn lefelé mozog a (27) kifejezés szerinti gyorsulással;

b) ha $F = G(\operatorname{tg} \alpha - \mu)/(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)$, akkor a test egyenletesen mozog lefelé vagy pedig nyugalomban van.

c) ha $F > G(\operatorname{tg} \alpha - \mu)/(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)$, akkor a test nyugalomban van. A test ez esetben nem képes elmozdulni a lejtőn felfelé. Első pillanatra ez meghökkentő, hiszen az F erő értékét minden határon túl növelhetjük! A lejtő meredeksége azonban annyira nagy, hogy az F erő növelésekor gyorsabban növekszik a testet a lejtő síkjához szorító erő értéke.

Diák: A középiskolában mi semmi ehhez hasonló jelenség bizonyítását nem tanultuk.

Tanár: Pontosan ezért kívántam felhívni a figyelmét erre a kérdésre. Természetesen a felvételi vizsgán valószínű, hogy leegyszerűsítve találkozhat ilyen feladattal, tehát a súrlódás vagy elhanyagolható, vagy pedig ha nem, akkor a test mozgási típusa előre ismert (pl. ismert, hogy a test mozog vagy nyugalomban van). Még ha nem merészkedünk a mély vízbe, akkor is hasznos tudni, hol kezdődik az.

Diák: De mi van akkor, ha az Ön által ismertetett esetben feltételezzük, hogy $\mu = 0$?

Tanár: A súrlódás eltűnésével az egész feladat rendkívül leegyszerűsödik. Ekkor bármilyen meredekségű lejtőre azt kapjuk, hogy:

– ha $F > G \operatorname{tg} \alpha$, akkor a test a lejtőn felfelé mozog a következő gyorsulással:

$$a = \frac{g}{G}(F \cos \alpha - G \sin \alpha), \tag{30}$$

– ha $F = G \operatorname{tg} \alpha$, akkor a test egyenletesen mozog (vagy felfelé vagy lefelé), vagy pedig nyugalomban van;

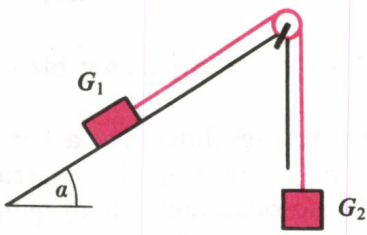
– ha $F < G \operatorname{tg} \alpha$, akkor a test a lejtőn lefelé mozog a következő gyorsulással:

$$a = \frac{g}{G}(G \sin \alpha - F \cos \alpha). \tag{31}$$

Felhívom a figyelmét, hogy (30) és (31) kifejezések csak az előjelekben különböznek egymástól. Ezért a feladat megoldása során nyugodtan választhatjuk tetszőlegesnek a test mozgási irányát, kiszámítjuk a gyorsulást, majd figyelembe vesszük a gyorsulás előjelét. Ha $a > 0$, akkor a test a kiválasztott irányban mozog, ha pedig $a < 0$, akkor a test az ellenkező irányban mozog (a gyorsulás számértékét természetesen az $|a|$ adja).

Lássunk még egy példát!

Adva vannak a G_1 és G_2 súlyú testek, amelyeket egy csigán átvetett kötél köt össze. A G_1 test az α meredekségű és súrlódási együtthatójú lejtőn fekszik, G_2 pedig a kötélen függ (35. ábra). Számítsuk ki a rendszer gyorsulását!



35. ábra

Tételezzük fel, hogy a rendszer balról jobbra mozdul el. A rendszer, mint egységes egész mozgásának vizsgálata során a gyorsulásra a következő kifejezést kapjuk:

$$a = g\frac{G_2 - G_1 \sin\alpha - G_2 \cos\alpha}{G_1 + G_2} \,. \tag{32}$$

Ha feltételezzük, hogy a rendszer jobbról balra mozdul el, akkor a gyorsulás:

$$a = g\frac{G_1 \sin\alpha - G_2 - \mu G_1 \cos\alpha}{G_1 + G_2} \,. \tag{33}$$

Végezzük el a vizsgálatot adott α és μ értékek esetén, tehát amikor a $p = G_2/G_1$ érték a változó!
A (32) kifejezés alapján a balról jobbra történő elmozdulás előfeltétele, hogy teljesüljön a következő egyenlőtlenség:

$$p \leqq (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)^{-1}.$$

A (33) kifejezés alapján a jobbról balra történő elmozdulás előfeltétele pedig a következő egyenlőtlenség teljesülése:

$$p \geqq (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)^{-1}.$$

Megjegyezzük, hogy kiegészítő feltételként teljesülnie kell annak is, hogy a lejtő meredeksége nem lehet túl kicsi, azaz $\operatorname{tg}\alpha > \mu$. Ha ugyanis $\operatorname{tg}\alpha \leqq \mu$, akkor a p arány lehet bármilyen nagy, a rendszer nem képes jobbról balra elmozdulni.
Ha $\operatorname{tg}\alpha > \mu$, akkor a rendszer a következő egyenlőtlenség teljesülése esetén van nyugalomban:

$$(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)^{-1} < p < (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)^{-1}.$$

Ha pedig $\operatorname{tg}\alpha \leqq \mu$, akkor a rendszer a következő egyenlőtlenség teljesülésekor marad nyugalomban:

$$p > (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)^{-1}.$$

8. LÉTEZIK-E CENTRIFUGÁLIS ERŐ?

Tanár: A gyakorlat azt mutatja, hogy a körmozgással kapcsolatos kérdések és feladatok igen nagy nehézséget okoznak a legtöbb vizsgázónál. Az ezekre a kérdésekre adott válaszok egész sor jellegzetes hibát tartalmaznak. Ezeket a hibákat szemléletesebben be tudjuk mutatni, ha meghívunk a beszélgetésünkre egy harmadik résztvevőt, aki előtt ismeretlen, hogy mi ketten miről beszéltünk eddig. Nevezzük második diáknak. Megkérem a második diákot, rajzolja fel a Föld körül keringő szputnyikra ható erőket. Állapodjunk meg, hogy a levegő közegellenállását, a Hold, Nap és a többi égitest tömegvonzását elhanyagoljuk.

Második diák: A szputnyikra két erő hat: a Föld tömegvonzása és a centrifugális erő.

Tanár: A Föld vonzóereje ellen semmi kifogásom, viszont a centrifugális erő jelenlétét nem értem. Magyarázza meg ezt, kérem!

Második diák: Ha nem létezne ez az erő, akkor a szputnyik nem lenne képes megmaradni a pályáján.

Tanár: Hanem mi történne vele?

Második diák: Leesne a Földre.

Tanár: (az első diákhoz fordulva) Emlékszik még, mit mondtam én korábban? Tessék egy példa, amikor valamely erő létezését nem a testek kölcsönhatásából, hanem fordítva, a test mozgási sajátosságaiból kívánnak levezetni. Ugye, most már látja, milyen a diáklogika? Ha egyszer a szputnyiknak pályáján kell maradnia, hát fogjuk magunkat és létesítünk egy „visszatartó" erőt. Erre viszont én azt mondom, hogy ha ez az erő valóban létezne, a szputnyik éppen akkor nem volna képes megmaradni a pályáján. Az történne ugyanis, hogy a szputnyikra ható erők kölcsönösen kiegyenlítenék egymást, és az kénytelen volna egyenes vonalban, egyenletesen folytatni útját.

Első diák: A centrifugális erő sohasem hat a forgó mozgást végző testre, csakis a kötőelemre. A forgó testre a centripetális erő hat.

Második diák: Tehát a szputnyikra csak a súlya hat?

Tanár: Igen, kizárólag a nehézségi erő, nem a súly.

Második diák: És ennek ellenére az nem esik le a Földre?

Tanár: **Egy testnek a gravitációs erő hatására történő elmozdulását szabadesésnek nevezzük. Tehát a szputnyik szabadon esik. Ez az „esés" azonban a Föld körüli körpályán megy végbe, ezért végtelen ideig tart.** Korábban már megtárgyaltuk (lásd 4. óra), hogy a test mozgási irányának nem feltétlenül kell egybeesnie a rá ható erők irányával.

Második diák: Amikor a Föld vonzásáról és a centrifugális erőről beszéltem, akkor a következő kifejezésből indultam ki:

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r^2}; \qquad (34)$$

ahol az egyenlet bal oldala a vonzóerő (m – a szputnyik tömege, M – a Föld tömege, r – a pálya sugara, γ – a gravitációs állandó), a jobb oldala pedig a centrifugális erő (v – a szputnyik sebessége). Tehát ez a kifejezés hibás lenne?

Tanár: Nem, a kifejezés pontos. Magyarázata a hibás. Úgy tekinti a (34) kifejezést, mint két erő egyensúlyi egyenletét. A valóságban ez nem más, mint Newton második törvényének átvitt értelmű kifejezése, azaz:

$$F = ma, \qquad (34.\ a)$$

ahol: $F = \gamma mM/r^2$, és az $a = v^2/r$ – a centripetális gyorsulás.

Második diák: Egyetértek, hogy az Ön értelmezése szerint nélkülözni tudjuk a centrifugális erőt. De ha már nincs centrifugális erő, akkor legalább a centripetális erőnek léteznie kell. Ön azoban ezt nem említette.

Tanár: Jelen esetben a centripetális erő maga a szputnyik és a Föld közötti vonzóerő. Hangsúlyoznám, hogy nem két különféle erőről van szó. Ez egy és ugyanazon erő.

Második diák: De akkor egyáltalán miért van szükség a centripetális erőre?

Tanár: No látja, ebben teljesen egyetértek Önnel! Magam is úgy vélem, hogy a „centripetális erő" kifejezés a felesleges keveredésen kívül

semmi eredményre nem vezet. **Az, amit a centripetális erő alatt értünk, egyáltalán nem egy önálló erő, amely a többi erővel együtt hat a testre. Ez nem más, mint az egyenletes körmozgást végző testre ható erők eredője.** Az mv^2/r kifejezés nem egy erő, hanem a test m tömegének és a v^2/r centripetális gyorsulásnak a szorzata. Ez a gyorsulás a kör középpontja felé irányul, tehát az egyenletes körmozgást végző testre ható erők eredőjének is a középpont felé kell mutatnia. **Tehát van egyszer a centripetális gyorsulás és vannak azok az erők, amelyeknek az összege a testnek ezt a gyorsulást adja.**

Második diák: Meg kell vallanom, hogy nekem tetszik a körmozgás ilyenfajta értelmezése. Valóban, ezt a mozgást nem tekinthetjük egy statikus állapotnak, amelyre a hatóerők egyensúlya jellemző, hanem ez egy dinamikus állapot.

Első diák: Úgy gondolom, hogy ha elvetjük a centripetális erőt, akkor bizonyára le kell mondanunk a „centrifugális erő" kifejezésről még a kötőelemre vonatkoztatva is, nemde?

Tanár: Hát azért végképp nem vetjük el a centripetális erő fogalmát, csak megjegyezzük, hogy általában nem egy önálló erő, nem mindig adható meg *két* test kölcsönhatásaként, hanem a körmozgást végző testre ható erők *eredője*. Ezzel szemben a centrifugális erő kifejezést valóban nem lehet mindig használni, de ennek nem az az oka, hogy a centripetális erő fogalmát „elvetjük".

Első diák: Ez utóbbi megjegyzését nem értem. A centrifugális erőt a centripetális erő ellentétjeként szokták emlegetni. Ha ez nem mindig létezik, akkor Newton harmadik törvénye sem mindig érvényes?

Tanár: Érvelése logikus, de helytelen megállapításból indul ki. Tévednek ugyanis azok, akik a centrifugális erőt a centripetális erő ellenerejének nevezik. Tisztázzuk végre a fogalmakat definíciójuk megadásával!

Hogy meghatározásaink szemléletesek is legyenek, vizsgáljuk meg a rádiózásban használatos szputnyikok körmozgását. A távközlési holdak pályáját kiválasztó legfontosabb szempont: legyen a hold keringési ideje éppen egy nap. Így a műhold a Földdel együtt fordul el, vagyis mindig a Föld egy adott pontja felett tartózkodik. Ha a mozgást egy Földön kívüli megfigyelési pontban állva (pontosabban inerciarendszerből) írjuk le, a következőket mondjuk: a Föld és a műhold gravitációs kölcsönhatásban vannak. A Föld vonzza a szputnyikot. Ez a vonzás a centripetális erő, amelynek köszönhetően a szputnyik körpályán mozog. Newton harmadik

törvénye szerint a hatás kölcsönös. A szputnyik is vonzza a Földet. Ez a vonzás a centripetális erő ellenereje, és hatásaként a Föld mozgásának pályája megfigyelhetetlenül kis mértékben módosul. Amint látták, ebben a leírásban nyoma sem volt a centrifugális erő kifejezésnek. Szemlélődjünk most egy számunkra megszokottabb nézőpontból. A Földön álló megfigyelő azt tapasztalja, hogy a szputnyik egy bizonyos magasságban a földfelszín egy adott pontja felett „áll'. Ez a tapasztalat nagyon furcsa, és nehezen egyeztethető össze a Föld körül keringő szputnyik képével. Talán a Föld felett nyugvó szputnyikról kell beszélnünk? Gondolom már rájöttek, mi a magyarázata e különös tapasztalatnak.

Második diák: Igen. Az események leírását most egy olyan vonatkoztatási rendszerben – a Földön állva – végezzük, amely rendszer az előző leírásban használt rendszerhez képest – a Földdel együtt – forog. Együtt forog ezért a távközlési holddal is, így a vonatkoztatási rendszer és a hold egymáshoz képest nem változtatja a helyzetét. Ebben a rendszerben a szputnyik valóban nyugalomban van.

Tanár: Nagyszerű! Ha erre ilyen hamar rájöttek, a hátralevő lépést már könnyedén megtehetik. Vonatkoztatási rendszerünk együtt forog a szputnyikkal, tehát forog a korábban használt inerciarendszerhez képest is. Vagyis most a vonatkoztatási rendszer nem inerciális rendszer. De ha nem inerciális rendszer, akkor – miként erről már korábban beszéltünk – nem érvényesek benne Newton törvényei! Nézzük csak meg! A műholdra a vonatkoztatási rendszer középpontja felé irányuló, állandó nagyságú erő hat. És az állandó erő hatására a test nyugalomban van!? A helyzet tulajdonképpen elkeserítő. Jól megtanultuk Newton törvényeit, és eddig viszonylag bonyolultabb feladatok megoldására is kitűnően használtuk. Most pedig le kell mondanunk róluk és új fizikát kell írnunk? Olyant, amelyben bizonyos állandó erő hatására a testek nem gyorsulnak, hanem nyugalomban lesznek, és ha ez az erőhatás megszűnik, akkor kezdenek gyorsulva mozogni, mint ahogy a szputnyik is eltávolodna a Földtől, ha megszűnne a tömegvonzás?

Második diák: Megvan! Mégis igazak a Newton-törvények. Hiszen a szputnyikra hat a centrifugális erő. Ez egyensúlyozza ki a tömegvonzást. Végül is a szputnyikra ható erők eredője nulla, érthető, hogy a szputnyik a forgó vonatkoztatási rendszerben nyugalomban van.

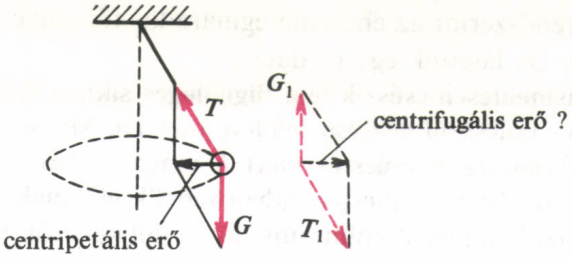
Első diák: Te csalsz! Centrifugális erő nem létezik. Azért találtad ki, hogy megmentsd a Newton-törvények érvényességét.

Tanár: Nagyszerűen vitatkoznak. Ugyanis mindkettőjüknek igaza van! A neminerciális rendszerben a Newton-törvények érvényüket vesztik. Ahhoz, hogy az egyszerű és szemléletes Newton-törvényeket mégis használni tudjuk, bevezetünk egy erőt, amely minden – a forgó vonatkoztatási rendszerben levő – testre eleve hat. (Éppen úgy, mint a Föld vonzási terében levő minden testre eleve hat a gravitáció.) E kényszerűségből vagy célszerűségből bevezetett erő neve a centrifugális erő. Fajtáját tekintve nagyon eltér az eddigiektől. Ugyanis ez az erő nem két test kölcsönhatásából származik (az elemzett példánkban a Földön és a szputnyikon kívül nincs egy harmadik test), hanem fellépte egyszerűen a vonatkoztatási rendszer forgásának köszönhető. És mivel nem két test kölcsönös hatásának eredménye, nem teljesül rá Newton harmadik törvénye sem. Az ilyen erőket, amelyek mindig a vonatkoztatási rendszer neminerciális voltának kompenzálásaként kerülnek a leírásba, inerciaerőknek nevezzük. Reakcióerejük nincs.

Első diák: Tehát, ha inerciarendszerben írjuk le a körmozgást, beszélhetünk centripetális erőről, és annak ellenerejéről (amely természetesen nem a körmozgást végző testre hat); ha pedig forgó vonatkoztatási (nem inerciális) rendszerből szemlélődünk, akkor bevezetjük a testekre ható centrifugális erőt. Vagy az egyik esetről beszélünk, vagy a másikról. A kettőről együtt sohasem.

Tanár: Maga hajlamos a túlzott egyszerűsítésre. De az a szabály, amit most mondott el, nagyon megszívlelendő. Egyébként a második leírás centrifugális ereje nagyság szerint megegyezik az első leírás centripetális erejével, iránya pedig ellentétes. Talán éppen ez az oka a gyakori félreértésnek.

Most, az igazság birtokában, nézzük meg egy egyszerű példán is, mennyire zavaros dolog a centrifugális erőt a centripetális erő ellenerejeként megadni! A 36. ábra köringájának végére akasztott kis golyóra két erő hat: a golyó G súlya és a fonal T húzóereje. A két erő eredője okozza a golyó centripetális gyorsulását, és ezért ezt az erőt centripetális erőnek nevezzük. A G erő a golyó és a Föld kölcsönhatásaként jön létre. Ennek ellenhatásaként jelentkezik a Földre ható G_1 erő. A T erő a golyó és a fonál kölcsönhatásának eredménye. Ellenereje a fonálra ható T_1 feszítőerő. Ha formálisan összegezzük a G_1 és T_1 erőket, a 36. ábrán szagga-



36. ábra

tott vonallal jelölt erőt kapjuk. De mi dolog az, két *különböző* testre ható erőt összegezni! És mire hat ez az erő? A golyóra? Lehet ez a centrifugális erő? A válasz nyilvánvalóan: nem!

Első diák: Eddig az egyenletes körmozgásról tetszett nekünk beszélni. De mi van akkor, ha a test nem egyenletesen mozog egy kör mentén. Például ha egy test egy függőleges síkban felállított abroncs külső felületén lecsúszik. Amíg a test az abroncs mentén csúszik, addig körmozgást végez, de világos, hogy ez a mozgás nem egyenletes, mivel a test sebessége állandóan nő. Tehát mi a helyzet ez esetben?

Tanár: Ha egy test a kör mentén egyenletesen mozog, akkor a ható-erők eredője feltétlenül a kör középpontja felé irányul és a test centripetális gyorsulását okozza. **A körmozgás általánosabb esetében, amikor az nem egyenletesen megy végbe, az eredő már nem feltétlenül a középpont felé irányul. Ebben az esetben van egy olyan összetevő, amely sugárirányban a központ felé mutat és egy olyan összetevő, amely a pálya (azaz a kör) érintőjével azonos irányú.** Az első összetevő okozza a test centripetális gyorsulását, míg a második az ún. tangenciális (érintőleges) gyorsulást, amely a sebesség nagyságának megváltoztatásával kapcsolatos. Ki kell emelnünk, hogy mivel a test sebessége változó, ezért változónak kell lennie a v^2/r centripetális gyorsulásnak is.

Első diák: Ez azt jelenti, hogy **a centripetális gyorsulás értékét minden egyes időpontban az $a = v^2/r$ kifejezés adja, ahol v a sebesség pillanatnyi értéke az adott időpontban?**

Tanár: Pontosan így van. **Míg az egyenletes körmozgás esetén a centripetális erő állandó, addig az változó körmozgás esetén a test mozgása során állandóan változik.**

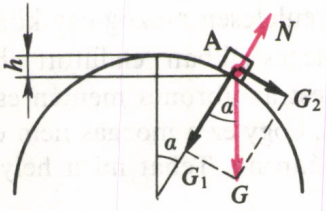
Első diák: Honnan tudhatjuk azt meg, hogy konkrétan hogyan változik a v sebesség a nem egyenletes körmozgás során?

Tanár: Erre a célra rendszerint az energiamegmaradás törvényét szoktuk felhasználni. De lássunk egy példát!

Egy test súrlódásmentesen csúszik le a függőleges síkban felállított R sugarú abroncs csúcsáról a külső felülete mentén. Milyen erővel hat a test az abroncsra a csúcstól mért h magasságban? A test kezdősebességét az abroncs csúcspontjában vegyük nullának.

Mindenekelőtt azt kell megállapítanunk, hogy milyen erők hatnak a testre.

Első diák: A testre két erő hat: a $G = Mg$ nehézségi erő és az alátámasztási felület N reakcióereje. Ezeket az erőket szemlélteti a 37. ábra.



37. ábra

Tanár: Helyes. És a továbbiakban mi a teendő?

Első diák: A továbbiakban azt teszem, amit korábban el tetszett mondani, nevezetesen: megszerkesztem ezeknek az erőknek az eredőjét, majd pedig az eredőt felbontom sugárirányú és érintőleges összetevőkre.

Tanár: Ez így helyes. Azonban bizonyára egyszerűbb, ha nem szerkesztjük meg az eredőt, hanem a testre ható erőket rögtön az említett irányú összetevőkre bontjuk, annál is inkább, mivel csak az egyik erőt – a nehézségi erőt – kell felbontani.

Első diák: A 37. ábrán elvégeztem ezt a felbontást.

Tanár: A G_2 erő a tangenciális gyorsulást okozza, és ez bennünket nem érdekel. A G_1 és N erők eredője okozza a test centripetális gyorsulását, azaz

$$G_1 - N = \frac{Mv^2}{R}. \tag{35}$$

A test sebességét a bennünket érdeklő A pontban az energiamegmaradás törvényéből kapjuk:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2. \tag{36}$$

A (35) és (36) egyenletek összevonásával és a $G_1 = Mg\cos\alpha = Mg(R-h)/R$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$Mg\frac{R-h}{R} - N = \frac{2Mgh}{R}.$$

A keresett erő, amellyel a test az abroncsot nyomja, Newton harmadik törvénye értelmében megegyezik azzal az erővel, amellyel az abroncs mint alátámasztási felület hat a testre!

$$N = Mg(R-3h)/R. \tag{37}$$

Második diák: A vizsgálat során feltételeztük, hogy az A pontban a test még érintkezik az abroncs felületével. De mi történik akkor, ha a test már az A pont előtt elszakadt az abroncstól?

Tanár: Kiszámíthatjuk annak a pontnak a helyét, ahol a testnek el kell szakadnia az abroncstól. Ez a pont megfelel annak a határesetnek, amikor a test által az abroncsra gyakorolt nyomóerő nullára csökken. Tehát a (37) egyenletbe $N = 0$ értéket kell helyettesíteni, majd kifejezni h értékét és megkapjuk a keresett pontnak a kör legmagasabb pontjától számított függőleges távolságát:

$$h_0 = R/3 \tag{38}$$

Ha a feladat adatai szerint $h < h_0$, akkor a (37) eredmény helyes, ha pedig $h \geqq h_0$, akkor $N = 0$.

Első diák: Ha jól értettem, akkor ebben a példában két fizikai törvényszerűséget használtunk fel, amelyeket a (35) és (36) egyenlet fejez ki.

Tanár: Nagyon jó, hogy ezt eszembe juttatta, mert egyébként is kívántam erről szólni. Valóban ebben a feladatban két törvényt használtunk fel: Newton második törvényét [lásd (35) egyenlet] és az energiamegmaradás törvényét [lásd (36) egyenlet]. Sajnos, a vizsgázók nem mindig látják eléggé világosan, hogy tulajdonképpen mely fizikai törvényszerűségek felhasználásával oldják meg az egyes feladatokat. Pedig ez nagyon fontos.
Vegyük az alábbi példát!

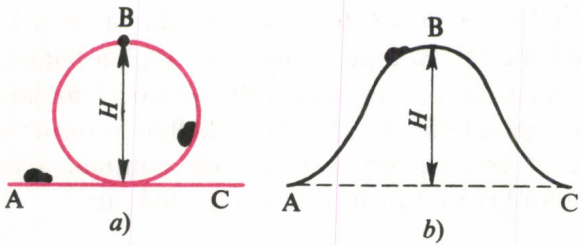
Egy testet olyan v_0 sebességgel kell elindítani, hogy az A pontból eljusson a C pontba. Kétféle pálya közül választhatunk (lásd 38. *a)* és *b)* ábra). A testnek mindkét esetben ugyanazon a H magasságon kell átjutnia, de eltérő módon. Számítsuk ki mindkét esetben a mi-

nimálisan szükséges v_0 kezdősebességet. A súrlódást elhanyagolhatjuk.

Második diák: Úgy gondolom, hogy a minimálisan szükséges kezdősebesség mindkét esetben ugyanaz lesz, hiszen a súrlódással nem számolunk, és a testnek azonos magasságon kell átjutnia. Ezt a kezdősebességet az energiamegmaradás törvényéből számolhatjuk:

$$mgH = \frac{1}{2}mv_0^2, \text{ innen pedig } v_0 = \sqrt{2gH}.$$

Tanár: Megoldása hibás. Megfeledkezett arról, hogy az első esetben a testnek körmozgás közben kell átjutnia a pálya legfelső pontján. Ez pedig azt jelenti, hogy a legfelső pontban (38. *a)* ábra) a test



38. ábra

v_1 sebességét a (35) kifejezéshez hasonló dinamikai egyensúlyi egyenletből kell meghatározni. Mivel a feladatban minimumértéket keresünk, ezért azt a határesetet kell vennünk, amikor a B pontban a testnek az alátámasztási felületre gyakorolt nyomása éppen nulla. Ebben az esetben a testre csak a nehézségi erő hat, amely a centripetális gyorsulást közli a testtel, azaz:

$$mg = m\frac{v_1^2}{R} = 2m\frac{v_1^2}{H}. \tag{39}$$

Ha a (39) dinamikai egyensúlyfeltételt kiegészítjük a következő energiaegyenleggel:

$$\frac{1}{2}mv^2{}_0 = \frac{1}{2}mv^2{}_1 + mgH, \tag{40}$$

akkor azt kapjuk, hogy a minimálisan szükséges kezdeti sebesség értéke $\sqrt{5gH/2}$. A második esetben a test átjuthat a pálya legfelső pontján úgy, hogy a sebessége végtelenül megközelíti a nullát,

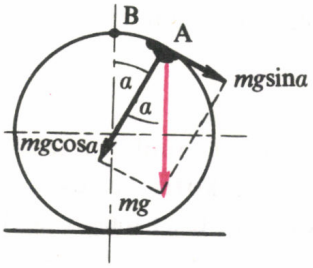
tehát elegendő az energiaegyenleggel számolni. És ekkor igaz az az eredmény, amit számolt.

Második diák: Értem. Ha az első esetben a test a B pontban nem rendelkezne sebességgel, akkor egyszerűen leesne.

Tanár: Ha a test kezdősebessége az első esetben a javasolt $v_0 = \sqrt{2gH}$ értékű lenne, akkor az el sem jutna a B pontig, hanem már korábban aláhullana. Most nézzük meg, melyik az a h magasság, ameddig a $v_0 = \sqrt{2gH}$ kezdősebességgel eljutna a test.

Első diák: Ha meg tetszik engedni, akkor megpróbálom én megoldani ezt a feladatot.

Tanár: Csak tessék!



39. ábra

Első diák: Abban az A pontban, ahol a test leesik, a körfelület hatása nullával lesz egyenlő. Már csak a gravitáció működik. Bontsuk fel a súlyerőt sugárirányú ($mg \cos \alpha$) és erre merőleges ($mg \sin \alpha$) összetevőkre, amint azt a 39. ábrán láthatjuk. A sugár mentén ható erő adja a testnek a centripetális gyorsulást, tehát az A pontban érvényes a következő egyenlet:

$$mg \cos \alpha = mv_2^2/R, \tag{41}$$

ahol: v_2 a test sebessége az A pontban. A sebességet az energiaegyenletből kapjuk:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{42}$$

A (41) dinamikai – és a (42) energiaegyenleteket összevonva és behelyettesítve $\cos \alpha = (h-R)/R$ értékét, a következő kifejezést kapjuk:

$$mg(h-R) = mv^2{}_0 - 2mgh.$$

Innen a h értéke:

$$h = (2v^2{}_0 + gH) / 6g. \tag{43}$$

Behelyettesítve ebbe a kifejezésbe a $v^2{}_0 = 2gH$ értéket, megkapjuk a végeredményt:

$$h = 5H/6.$$

Tanár: Az eredmény helyes. Megjegyzem, hogy a (43) egyenletből ki lehet számolni, milyen v_0 kezdősebességgel kell a testet elindítani ahhoz, hogy az „halálkört" írjon le. Ha a (43) egyenletbe $h = H$ értéket helyettesítünk, akkor:

$$H = (2v^2{}_0 + gH) / 6g.$$

Ebből pedig közvetlenül kapjuk a már korábban látott eredményt:

$$v_0 = \sqrt{5gH/2}.$$

Első diák: A (43) egyenletet arra az esetre kapjuk, amikor a test elszakad az alátámasztási felülettől. Hogyan vonatkoztathatjuk akkor arra az esetre, amikor a test elszakadás nélkül teszi meg a kört?

Tanár: A halálkör legmagasabb pontján az elszakadás gyakorlatilag azt jelenti, hogy a test nem esik le, hanem áthalad ezen a ponton, és folytatja útját.

Második diák: Mondhatjuk úgy is, hogy a test egy pillanatra mintha elszakadt volna a körpályától?

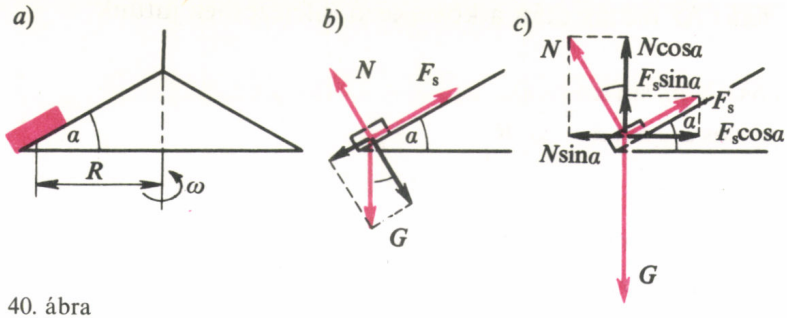
Tanár: Igen, így is lehet mondani. Befejezésül pedig javaslom, oldjuk meg a következő feladatot:

Egy α meredekségű lejtő alján fekszik egy test. A lejtő a függőleges tengelye mentén ω szögsebességgel egyenletes körmozgást végez. A test a forgástengelytől R távolságra helyezkedik el. Számítsuk ki a μ_0 nyugalmi súrlódási együttható azon legkisebb értékét, amelynél a test még megmarad nyugalmi helyzetében a lejtő szélén. (40. *a)* ábra).

(Emlékeztetésül mondom, hogy μ_0 értéke a nyugalmi súrlódási erő maximálisan lehetséges értékét szabja meg!)

A feladat megoldását kezdjük a szokásos módon; nézzük meg, milyen erők hatnak a testre!

Első diák: A testre három erő hat: a G súly, az alátámasztási felületre merőleges N nyomóerő és az F_s súrlódási erő.



40. ábra

Tanár: Igen. Nagyon helyes, hogy nem említette a centripetális erőt. Mi a teendő a továbbiakban?

Első diák: Ez után felbontom az erőket a lejtő síkjával párhuzamos és arra merőleges összetevőkre, amint azt a 40. *b)* ábra mutatja.

Tanár: Álljunk meg itt egy pillanatra! Nem tetszik nekem ez a felbontás. Ön szerint merre irányul a test gyorsulása?

Első diák: A gyorsulás vízszintes irányú. Ez a centripetális gyorsulás.

Tanár: Helyes. Éppen ezért az erőket vízszintes és függőleges, azaz a gyorsulás irányával megegyező és arra merőleges irányú összetevőkre kell felbontani. Emlékezzünk csak, miről is volt szó a 6. órán!?

Első diák: Igen, értem már. Az erők vízszintes és függőleges irányú felbontását a 40. *c)* ábra szemlélteti. A függőleges irányú összetevők kölcsönösen kiegyenlítik egymást, míg a vízszintes összetevők adják a test gyorsulását.

$$\left.\begin{aligned} N\cos\alpha + F_s\sin\alpha &= G,\\ F_s\cos\alpha - N\sin\alpha &= mv^2/R. \end{aligned}\right\}$$

Elvégezve az $F_s = \mu_0 N$, $v^2/R = \omega^2 R$ és $m = G/g$ helyettesítéseket, a fenti egyenleteket a következő alakra írhatjuk át:

$$\left.\begin{aligned} N(\cos\alpha + \mu_0\sin\alpha) &= G,\\ N(\mu_0\cos\alpha - \sin\alpha) &= G\omega^2 R/g. \end{aligned}\right\}$$

Második diák: Mindössze két egyenlet áll rendelkezésünkre, viszont az ismeretlenek száma három: μ_0, G, N.

Tanár: Igen, de nem vészes, mert nekünk nincs szükségünk mindhárom ismeretlenre, csupán μ_0 értékére vagyunk kíváncsiak. A G és N ismeretlenektől könnyen megszabadulhatunk, ha az első egyenletet a másodikkal elosztjuk.

Első diák: Az osztás után a következő kifejezéshez jutunk:

$$\frac{\cos\alpha+\mu_0\sin\alpha}{\mu_0\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{g}{\omega^2R}.$$

Innen pedig a keresett μ_0 értéke:

$$\mu_0=\frac{\omega^2R\cos\alpha+g\sin\alpha}{g\cos\alpha-\omega^2R\sin\alpha}. \tag{44}$$

Tanár: A (44) kifejezés alapján világos, hogy teljesülnie kell a

$$(g\cos\alpha-\omega^2R\sin\alpha)>0$$

feltételnek, amelyet így is írhatunk:

$$\operatorname{tg}\alpha<\frac{g}{\omega^2R}. \tag{45}$$

Ha a (45) feltétel nem teljesül, akkor semmilyen súrlódási erő nem képes megtartani a testet a forgásban levő lejtő felületén. Befejezésül szeretném felhívni a figyelmüket a (44) egyenlet két szélső esetére. Az egyik ilyen eset, amikor $\alpha=0$, azaz a test egy vízszintes, forgó lemezen fekszik. A (44) egyenletből ekkor:

$$\mu_0=\omega^2R/g.$$

A másik szélső esetben $\omega=0$, azaz a test egy mozdulatlan lejtőn helyezkedik el, és éppen most kezd majd azon lefelé csúszni. Ekkor a (44) alapján:

$$\mu_0=\operatorname{tg}\alpha.$$

Első diák: Ezzel a kifejezéssel én már találkoztam. Ez nem más, mint a lejtőről egyenletesen lefelé csúszó test súrlódási együtthatója.

Feladatok:

24. Egy fonálra felfüggesztett kis méretű test a vízszintes síkban egyenletes körmozgást végez (41. ábra). Határozzuk meg a fonálra ható feszítőerők és a szögsebességek arányát, ha $\alpha_1=30°$, illetve $\alpha_2=45°$!

25. Egy l hosszúságú fonálra felfüggesztett M testet a függőleges helyzetéből 90°-ra kitérítünk és elengedjük azt. Hogyan változik

a fonálra ható feszítőerő és a test gyorsulásának értéke a fonál és a függőleges által bezárt szög függvényében?

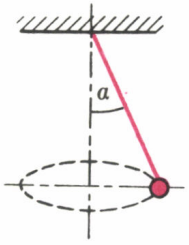
26. Hogyan aránylik egymáshoz az a két nyomóerő, amellyel egy tank a domború, illetve homorú ívelésű hídpillérre hat, ha a pillér görbületi sugara mindkét esetben 40 m, a tank sebessége pedig 45 km/óra?

27. Egy test súrlódásmentesen csúszik le a $H = 60$ cm magasságból és $R = 20$ cm sugarú halálkört ír le (42. ábra). Számítsuk ki a felületre ható nyomóerők irányát az A, B illetve C pontban!

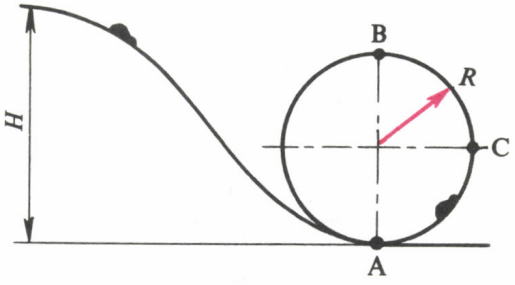
28. Mekkora legkisebb H magasságból kell egy testnek súrlódásmentesen lecsúsznia, hogy az egy halálkört írjon le (42. ábra)?

29. Egy M tömegű test a 43. ábrán bemutatott profil mentén (a görbületi sugár: R) állandó v sebességgel mozog. Számítsuk ki az alátámasztási felületre ható nyomóerőt az A, B és C pontokban!

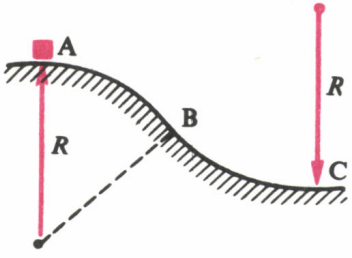
30. Egy test a függőleges síkban R hosszúságú fonálhoz rögzítve körpályán tud elmozdulni. Milyen vízszintes irányú sebességet kell a testtel közölni a legfelső pontban ahhoz, hogy a fonálra ható feszítőerő a legalsó pontban a test súlyának 10-szerese legyen?



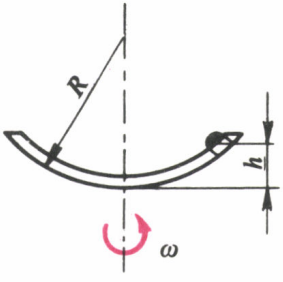
41. ábra



42. ábra



43. ábra



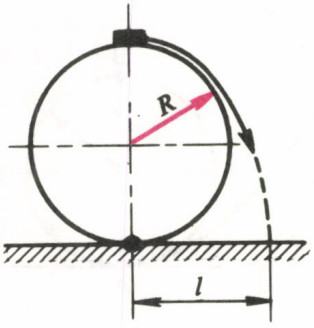
44. ábra

31. Egy R sugárban meghajlított abroncsdarabon egy m tömegű test súrlódásmentesen képes elcsúszni. Milyen h magasságban helyezkedik el a test, ha az abroncsdarab ω szögsebességgel egyenletesen forog (44. ábra)? Milyen F nyomóerővel hat a test az abroncsra?

32. Egy l hosszúságú fonálra egy fémgolyó van felerősítve. A golyót olyan magasságba emeljük, hogy a fonál vízszintes helyzetbe kerül, majd elengedjük. Határozzuk meg, mekkora h magasságba emelkedik fel a golyó, ha a fonál felfüggesztési pontjától függőlegesen lefelé $l/2$ távolságra a fonál útjába egy szeg van beverve!

33. Egy kör keresztmetszetű gumikötél két végét összekötjük és egy, a függőleges tengelye körül $n = 20\ \mathrm{s}^{-1}$ fordulatszámmal forgó vízszintes síkú korongra tesszük azt. A forgás következtében a kötél megfeszül. Számítsuk ki a kötélre ható T feszítőerőt, ha annak tömege $m = 15$ g, hossza pedig $l = 60$ cm!

34. Egy R sugarú abroncs függőlegesen áll és le van rögzítve a padlóhoz. Az abroncs csúcspontjáról súrlódásmentesen csúszik le egy test (45. ábra). A rögzítési ponttól milyen l távolságra ér földet a test?



45. ábra

9. HOGYAN ÉRTELMEZZÜK A SÚLYTALANSÁG ÁLLAPOTÁT?

Tanár: Mit ért a következő kijelentés alatt: „Az egyenlítő mentén a test súlya kisebb, mint a sarkokon"?

Második diák: Ezt én a következőképpen értelmezem: Az egyenlítő mentén a Földnek a testre gyakorolt vonzóereje kisebb, mint a sarkokon, és ennek két oka van. Először is a sarkokon a Föld felszíne kissé benyomódott a gömbfelszínhez képest, tehát a sarkokon a Föld középpontjától mért távolság kisebb, mint ugyanez a távolság az egyenlítőn. Másodszor pedig a Föld forog saját tengelye körül, és ennek következtében a centrifugális effektussal csökkentenünk kell a vonzóerőt.

Első diák: Ez alatt az utóbbi megjegyzés alatt mit értesz pontosan?

Második diák: A vonzóerőből le kell vonni a centrifugális erőt.

Első diák: Ezzel én nem értek egyet. Először azért nem, mert a centrifugális erő nem hat a körpályán mozgó testre, amint azt az előző paragrafusban már láttuk is. Másodszor pedig, még ha létezne is ez az erő, egyáltalán nem változtatná meg a vonzóerő értékét, tehát az pontosan olyan maradna, mintha a Föld nem forogna. Gondoljuk csak meg, hogy a vonzóerő értékét a $\gamma mM/r^2$ kifejezés adja, márpedig ez egyáltalán nem függ attól, hogy a testre közben más erő hat-e vagy sem.

Tanár: Lám, lám, mégsem olyan egyszerű ez a kérdés még a testek „súlyossága" vonatkozásában sem. Nem véletlen, hogy a legtöbb felvételiző erre a kérdéscsoportra is általában helytelen választ ad. Valóban, ha a „test súlya" alatt csupán a Föld és a test közötti vonzóerőt értjük, amelyet a $\gamma mM/r^2$ kifejezés határoz meg, akkor a test a „súlycsökkenése az egyenlítő mentén" tényleg csakis azzal hozható összefüggésbe, hogy a Föld a sarkoknál behorpadt gömbfelületű.

Második diák: Mégsem hagyhatjuk figyelmen kívül a Föld forgását!

Tanár: Teljesen egyetértek. De először azt szeretném kiemelni, hogy a gyakorlatban „a test súlya" alatt általában nem a test és a Föld közötti vonzóerőt értik – ami egyébként teljesen logikus –, hanem azt az erőt, amelyet a rugós mérleg mér, azaz amellyel a test a Föld felületét nyomja. Más szavakkal az alátámasztási felület ellenhatását mérjük, ami Newton harmadik törvénye értelmében ugyanaz. Ebből pedig az következik, hogy „a test súlya az egyenlítő mentén kisebb, mint a sarkokon" kifejezés gyakorlatilag azt jelenti, hogy a testnek az alátámasztási felületre gyakorolt nyomóereje az egyenlítő mentén kisebb, mint a sarkokon.

Jelöljük a vonzóerőt a sarkokon G_1-gyel, az egyenlítő mentén pedig G_2-vel; az alátámasztási felületre ható erő ellenhatását a sarkokon N_1-gyel, az egyenlítő mentén N_2-vel. A sarkokon a test nyugalomban van, az egyenlítő mentén pedig körmozgást végez. Ennek alapján a következő egyenleteket kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} G_1 - N_1 &= 0, \\ G_2 - N_2 &= ma_{cp}, \end{aligned}\right\}$$

ahol: a_{cp} – a centripetális gyorsulás. Rendezzük át az egyenleteket:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= G_1, \\ N_2 &= G_2 - ma_{cp}. \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

Ebből világosan látszik, hogy az N_2 erő kisebb az N_1-nél, mivel egyszer a G_2 kisebb, mint G_1 (a Föld a sarkokon „behorpadt"), illetve a G_2-ből még ki kell vonni ma_{cp} értékét (a Föld forgási effektusát).

Második diák: Tehát az a kifejezés, hogy „a test súlya felére csökkent", nem azt jelenti, hogy a test és a Föld (vagy más égitest) közötti vonzóerő csökkent a felére?

Tanár: Valóban, nem jelenti azt. Közben a vonzóerő teljesen változatlan is maradhat. Ez a kifejezés azt jelenti, hogy a testnek a felületre gyakorolt nyomóereje csökkent a felére.

Második diák: De akkor végeredményben azt kapjuk, hogy a test „súlyával", illetve súlytalanságával szabadon rendelkezünk. Mi akadályoz bennünket pl. abban, hogy a test alá egy igen mély gödröt ássunk? És ha a test az alátámasztási felületével együtt esik a gödörbe lefelé, akkor egyáltalán semmiféle erővel nem hat erre a felületre. Ez azt jelenti tehát, hogy a test teljesen „elveszítette a súlyát" azazhogy a súlytalanság állapotába került?

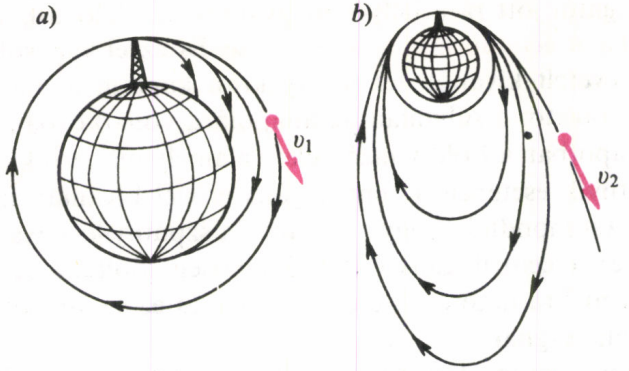
Tanár: Most magától jött rá a helyes magyarázatra. Valóban, **a súlytalansági állapot nem más, mint a test esése.** És ezzel kapcsolatban néhány észrevételt kívánok tenni. Gyakran kaptam a diákoktól olyan magyarázatot a súlytalanság állapotára vonatkozóan, hogy ebben az állapotban a Föld vonzóerejét valamely más erő kiegyenlíti. A szputnyik esetében a centrifugális erővel kívánták azt kiegyenlíteni. Azt mondták, hogy a Földnek a szputnyikra gyakorolt vonzóereje és a centrifugális erő kölcsönösen kioltják egymást, tehát a szputnyikra ható erők eredője nulla, és ez az állapot megfelel a súlytalanságnak.

De ha a súlytalanság alatt azt az állapotot értenénk, amikor a vonzóerőt egy másik erő semlegesíti, akkor logikusabb lenne súlytalannak nevezni azt a testet, amely egyszerűen fekszik a vízszintes felületen, hiszen ebben az esetben a vonzóerőt az alátámasztási felület ellenhatása pontosan kompenzálja! A valóságban azonban a súlytalansághoz egyáltalán nem szükséges a vonzóerő kiegyenlítése. Ellenkezőleg. **Ahhoz, hogy a test a súlytalanság állapotába kerüljön, olyan körülményeket kell létrehozni, amikor a testre a vonzóerőn kívül semmiféle erő nem hat. Más szavakkal: az szükséges, hogy az alátámasztási felületre ható nyomóerő nulla legyen. A testnek a vonzóerő hatására bekövetkező elmozdulását esésnek nevezzük, következésképpen, a súlytalanság nem más, mint az esés,** pl. a lift esése, a szputnyik keringése a Föld körül stb.

Első diák: Az előző fejezetben már tisztáztuk, hogy a szputnyik keringése a Föld körül nem más, mint a szputnyik esése a Földre, amely végtelenül hosszú ideig tart.

Tanár: Arról, hogy a szputnyik Föld körüli forgása esés, igen szemléltető módon meggyőződhetünk. Képzeljük el, hogy egy magas hegy csúcsán állunk, és vízszintes irányban követ dobálunk. A levegő ellenállását elhanyagoljuk. Minél nagyobb a kő kezdősebessége, annál távolabb fog a kő földet érni. A 46. *a)* ábra azt szemlélteti, hogyan változik a kő pályája a sebesség növelésekor. Egy adott v_1 sebességnél az eldobott (és esésben levő) kő pályája egy kör lesz, és a kő a Föld körül keringeni fog. A v_1 sebességet első kozmikus sebességnek nevezzük. Ennek értékét a következő kifejezésből kapjuk:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}. \qquad (47)$$



46. ábra

Ha a szputnyik pályájának sugarát a Föld sugarához közeli értékűnek vesszük, akkor ebben az esetben $v_1 \cong 8$ km/s értékhez jutunk.

Első diák: Mi történik akkor, ha a hegy csúcsáról eldobott kő kezdősebességét tovább növeljük?

Tanár: Ebben az esetben a kő egyre inkább elnyújtott ellipszis pályán fog a Föld körül keringeni (46. *b)* ábra), míg egy bizonyos v_2 sebesség elérésekor a kő parabola pályára tér át, és elhagyja a Föld gravitációs terét. Ezt a v_2 sebességet második kozmikus sebességnek nevezzük. A számítások szerint erre 11 km/s értéket kapunk, ami $\sqrt{2}$-ször nagyobb v_1-nél.

Első diák: Ön úgy határozta meg a súlytalanságot, mint az esés állapotát. Ha azonban a kő kezdősebessége eléri a második kozmikus sebességet, akkor az kilép a Föld gravitációs teréből. Akkor viszont már nem beszélhetünk arról, hogy az esésben van a Földre. Ekkor hogyan magyarázható a kő súlytalansága?

Tanár: Nagyon egyszerű. A súlytalanság ebben az esetben azt jelenti, hogy a kő esik a Napba.

Első diák: Ez azt jelenti tehát, hogy a világűrben tartózkodó űrhajó súlytalansági állapotát úgy kell elképzelnünk, hogy az váltakozva „esik" hol az egyik, hol pedig egy másik csillag gravitációs erőterében?

Tanár: Pontosan így van.

Második diák: Nekem úgy tűnik, hogy a súlytalanság állapotának az esésként való értelmezése magyarázatra szorul. Azért gondolom így, mert az ejtőernyős is esik, mégsem kerül a súlytalanság állapotába.

Tanár: Igaza van. A súlytalanság nem akármilyen esés, hanem úgynevezett szabadesés, amikor a testre kizárólag (!) a nehézségi erő

hat. Mint mondottam, a test súlytalansági állapotának előfeltétele, hogy olyan körülményeket biztosítsunk, amikor a testre a vonzóerőn kívül semmilyen más erő nem hat. Az ejtőernyősre azonban esés közben más erő is hat, nevezetesen a levegő közegellenállása.

Első diák: Most már értem a súlytalanságot!

Tanár: Lássunk egy ellenőrző kérdést! Valamely űrhajó utasai arra kérik a kapitányt, hogy hozzon létre űrhajójukban súlytalansági állapotot. Mit kell ehhez tennie a kapitánynak?

Első diák: Én úgy gondolom, hogy ki kell kapcsolni a hajtóművet.

Tanár: Nagyon helyes.

Második diák: Elnézést kérek. Én nemrég olvastam Verne Gyula Utazás a Holdra című könyvét. A könyvben az űrhajónak egyáltalán nem is volt hajtóműve, mégis a Föld – Hold távolság több mint a felét úgy tették meg, hogy nem kerültek súlytalanság állapotába. Sőt találgatták, hogy egyáltalán repülnek-e!

Tanár: Beleesett ugyanabba a hibába, mint az író! Verne rosszul értelmezte a súlytalanságot, amikor pl. azt feltételezte, hogy ez az állapot akkor jön létre, amikor a Föld vonzóerejét a Hold vonzóereje kiegyenlíti. Ezért gondolta ő, hogy az űrhajósok csak a Föld – Hold távolság egy bizonyos pontjában észlelik a súlytalanság állapotát. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a súlytalanság tüneteit helyesen írja le Verne.

Második diák: Verne utasainak útjuk során mindvégig a súlytalanság állapotában kellett volna lenniük.

Tanár: Természetesen.

Feladatok:

35. Számítsuk ki annak a gömb alakú égitestnek a ϱ sűrűségét, amelynek a felületétől mért 1/2 sugár távolságra egy szputnyik körpálya mentén T periódusidővel kering!

36. Mekkora T ideig kellene tartani a napoknak a Földön ahhoz, hogy az egyenlítőn elhelyezkedő testek súlytalanokká váljanak? A Föld sugara: $R = 6400$ km.

37. Számítsuk ki annak a gömb alakú égitestnek a ϱ sűrűségét, amelyről ismeretes, hogy egy nap rajta 10 óráig tart és az egyenlítője mentén a testek súlytalanok.

38. A Föld körül a felszíntől mért h_1 és h_2 magasságban kör-

pályán két szputnyik kering. Számítsuk ki a szputnyikok sebességeinek v_1/v_2, illetve keringési idejének T_1/T_2 arányát, ha a Föld sugara R!

39. Számítsuk ki a v_1 első kozmikus sebesség értékét egy olyan bolygóra, amelynek a tömege és sugara is háromszorosa a Földének!

10. TUDNAK-E BÁNNI AZ ENERGIA- ÉS IMPULZUSMEGMARADÁS TÖRVÉNYEIVEL?

Tanár: Feladnék néhány igen egyszerű példát.

Első példa:

Adott két azonos H magasságú, de eltérő α_1 és α_2 meredekségű lejtő. Számítsuk ki a lejtőkön nulla kezdeti sebességgel induló és lecsúszó testek sebességét a lejtő végén!

Második példa:

Ismeretes, hogy a $v = \sqrt{2as}$ kifejezés arra az esetre adja meg a test végsebességét, ha az nem rendelkezik kezdősebességgel. Hogyan módosul ez a kifejezés, ha a test v_0 kezdősebességgel indul?

Harmadik példa:

H magasságban v_0 kezdősebességgel vízszintes irányban eldobunk egy testet. Számítsuk ki a test sebességét a földet érés pillanatában!

Negyedik példa:

Egy testet α szög alatt v_0 kezdősebességgel ferdén eldobunk. Számítsuk ki a test maximális emelkedési magasságát!

Első diák: Az első példát a következőképpen oldanám meg: Vizsgáljuk például az α_1 meredekségű lejtőt! A testre két erő hat: a G nehézségi erő és az alátámasztási felület N_1 reakcióereje. Bontsuk fel a G erőt a lejtővel párhuzamos ($G \sin \alpha_1$) és arra merőleges ($G \cos \alpha_1$) összetevőire! A lejtőre merőleges irányú erők kiegyenlítik egymást, tehát:

$$G \cos \alpha_1 - N_1 = 0,$$

a lejtővel párhuzamos erőre pedig érvényes a

$$G \sin \alpha_1 = \frac{G}{g} a_1$$

egyenlet. Itt a_1 – a test gyorsulása. A második egyenletből kifejezhetjük a_1 értékét: $a_1 = g \sin \alpha_1$. A test által megtett út hossza $H/\sin \alpha_1$. A továbbiakban felhasználva a második példában említett kifejezést, a test sebességére az út végén a következő értéket kapjuk:

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s_1} = \sqrt{2g \sin \alpha_1 H/\sin \alpha_1} = \sqrt{2gH}.$$

Mivel a végeredmény nem függ a lejtő meredekségétől, ez a megoldás érvényes az α_2 hajlásszögű lejtőn lecsúszó test végsebességére is.
A második példát a következő mozgási egyenletek alapján oldom meg:

$$v = v_0 + at,$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Az első egyenletből kifejezem t értékét: $t = (v - v_0)/a$. Behelyettesítve ezt a második egyenletbe, a következő kifejezést kapom:

$$s = \frac{v_0(v - v_0)}{a} + \frac{a}{2} \cdot \frac{(v - v_0)^2}{a^2},$$

illetve rendezés után:

$$2sa = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2,$$

$$2as = v^2 - v_0^2.$$

Ebből a végeredmény:

$$v = \sqrt{2as + v_0^2}. \tag{48}$$

A harmadik példában először a végsebesség vízszintes irányú v_1 és függőleges irányú v_2 összetevőjét számítom ki. Mivel vízszintes irányban a test egyenletes mozgást végez, írhatjuk, hogy $v_1 = v_0$. Függőleges irányban a test g gyorsulással mozog, kezdősebessége viszont ebben az irányban nincs. Tehát az ismert kifejezés alapján

írhatjuk: $v_2 = \sqrt{2gH}$. A végsebesség Pitagorasz tétele alapján:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gH}. \tag{49}$$

A negyedik példát az 5. órán már vizsgáltuk. A test kezdősebességét $v_0 \cos \alpha$ vízszintes irányú és $v_0 \sin \alpha$ függőleges irányú összetevőire kell felbontani. A megoldás során a test függőleges irányú elmozdulását kell vizsgálnunk. Mindenekelőtt az egyenletesen lassuló mozgás sebességének $v_{\text{függ}} = v_0 \sin \alpha - gt$ egyenletéből kifejezzük az emelkedés t_1 idejét oly módon, hogy a $t = t_1$ pillanatban a függőleges sebességet egyenlővé tesszük nullával:

$$v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0,$$

azaz $$t_1 = \frac{v_0}{g} \cdot \sin \alpha.$$

t_1 ismeretében könnyen kiszámíthatjuk a H emelkedési magasságot az egyenletesen lassuló mozgás útjának egyenletéből:

$$H = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Tanár: Mind a négy példa végeredménye helyes. Meg kell azonban mondanom, hogy nekem nem túlságosan tetszik maga a feladatmegoldás módja. **Mind a négy példa egyszerűbben is megoldható az energiamegmaradás törvénye alapján.** Győződjünk meg erről közösen!

Első példa: Az energiamegmaradás törvénye alapján felírhatjuk:

$$mgH = \frac{1}{2}v^2$$

(a lejtő legfelső pontján a test potenciális energiája megegyezik a lejtő alján annak kinetikus energiájával). És ebből közvetlenül megkapjuk a test sebességét a lejtő alján:

$$v = \sqrt{2gH}.$$

Második példa: Ebben az esetben az energiamegmaradás törvénye a következő egyenlettel írható fel:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mas = \frac{1}{2}mv^2,$$

ahol *mas* az a munka, amelyet a testtel *a* gyorsulást közlő erő fejt ki. Innen közvetlenül a $v_0^2+2as = v^2$ alakra rendezés után v értékét:

$$v = \sqrt{2as+v_0^2}.$$

Harmadik példa: Az energiamegmaradás törvényét így írhatjuk:

$$mgH+\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2.$$

Ebből a kérdéses sebesség értéke

$$v = \sqrt{2gH+v_0^2}.$$

Negyedik példa: A hajítási pontban a test energiája $mv_0^2/2$-vel egyenlő. A pálya csúcspontjában a test energiája $mgH+mv_1^2/2$. Ha figyelembe vesszük, hogy a csúcspontban $v_1 = v_0 \cos\alpha$, és ezt beleyettesítjük az energiamegmaradás egyenletébe, akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH+\frac{1}{2}mv_0^2\cos^2\alpha,$$

ahonnan a keresett magasság:

$$H = \frac{v_0^2}{2g}\cdot 1-\cos^2\alpha,$$

azaz rövidebb alakban:

$$H = \frac{v_0^2\cdot\sin^2\alpha}{2g}.$$

Első diák: Most már látom, hogy ezeket a példákat valóban meg lehet oldani egészen egyszerű módon is. Sajnos, az energiamegmaradás törvénye a megoldáskor teljesen elkerülte figyelmemet.

Tanár: Igen, általában a felvételizők többsége is megfeledkezik az energiamegmaradás törvényéről. Így aztán kerülő úton, bonyolultabb eljárással fognak hozzá a feladat megoldásához, ami természetesen növeli a hiba lehetőségét. Azt tanácsolom, hogy bátrabban és gyakrabban alkalmazzák a feladatok megoldása során az energiamegmaradás törvényét.

De ha már itt tartunk, akkor lássuk, mennyire tudják alkalmazni ezt a törvényt!

Első diák: Én azt hiszem, hogy ez nem igényel kölönösebb hozzáértést, mert maga az energiamegmaradás törvénye mint olyan, meglehetősen egyszerű.

Tanár: Az, hogy egy törvényt mennyire helyesen tudunk alkalmazni, egyáltalán nem annak egyszerűségétől vagy bonyolultságától függ. Lássunk egy konkrét példát. Tételezzük fel, hogy egy test vízszintes síkban egyenletes körpályán mozog teljesen súrlódásmentesen. A testre a centripetális erő hat. Mivel egyenlő az a munka, amelyet ez az erő a test egy körbefordulása alatt végez?

Első diák: A munka egyenlő az erő és az út szorzatával. Tehát ebben az esetben a munka:

$$\frac{mv^2}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi m v^2,$$

ahol: R a kör sugara, m és v pedig a test tömege, illetve sebessége.

Tanár: Az energiamegmaradás törvénye értelmében a munka nem tűnhet el nyomtalanul. Hová lesz tehát a számított munka?

Első diák: A test forgatására fordítódik.

Tanár: Mit ért ez alatt pontosabban?

Első diák: Azt, hogy ez a munka tartja a testet a körpályán.

Tanár: Az elképzelése téves. Ahhoz, hogy a testet a körpályán tartsuk, semmiféle munka nem szükséges.

Első diák: Akkor én egyszerűen nem tudom, hogyan válaszolhatnék az Ön kérdésére.

Tanár: **A testtel közölt munka a következő esetek valamelyikére fordítódhat: 1. növelheti a test kinetikus energiáját, 2. növelheti a test potenciális energiáját, 3. munkát közölhet valamely más testtel, és 4. a súrlódás következtében hővé alakulhat át.** Így néz ki az az általános szabály, amelyet a vizsgázók nem mindig tartanak szem előtt. Most pedig nézzük a centripetális erővel kapcsolatos konkrét példánkat! A test állandó nagyságú sebességgel mozog, tehát kinetikus energiája nem változik, így az első lehetőség kiesik. A test vízszintes síkban mozog, tehát a potenciális energiája sem változik – a második eset is kizárt. Semmiféle más testtel az adott test munkát nem közöl, és végül a súrlódást eleve kizártuk.

Első diák: Tehát azt kapjuk, hogy a centripetális erő által végzett munka „nem tud hová lenni"?

Tanár: Igen, azt kapjuk, illetve, hogy döntenie kell. Vagy kijelenti, hogy az energiamegmaradás törvénye itt nem teljesül – és akkor nem is kell tovább törnie a fejét a magyarázaton –, vagy pedig az energiamegmaradás törvényének érvényességéből kiindulva... De tudja mit? Próbálja meg önállóan megtalálni a megoldás kulcsát!

Első diák: Úgy gondolom, nem tehetek okosabbat, mint megállapítom, hogy adott esetben **a centripetális erő a testtel semmiféle munkát nem közöl.**

Tanár: Teljesen logikus következtetés. Nyomatékosan aláhúznám, hogy **ez a következtetés közvetlenül az energiamegmaradás törvényéből fakad.**

Második diák: De hogyan egyeztethető ez össze a munka kifejezésével?

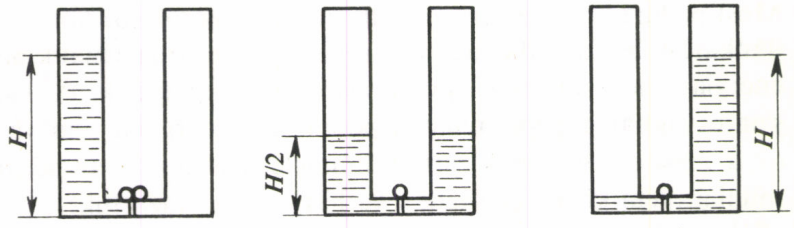
Tanár: A munka képlete nem egyszerűen az erő és az út szorzatát tartalmazza, hanem az erő és az elmozdulásvektorok közötti szög cosinusát is, azaz:

$$W = Fs \cos \alpha.$$

Példánkban azonban $\cos \alpha = 0$.

Első diák: Tényleg!... A cosinusról én teljesen megfeledkeztem.

Tanár: Javaslom, hogy nézzük még egy példát! Vegyünk a két hengerből és az összekötő vékony csővezetékből álló közlekedőedényt! Kezdetben legyen a teljes folyadékmennyiség a bal oldali edényben, ahol a folyadékoszlop magassága ekkor H (47. *a)* ábra). Ha a csapot kinyitjuk, a folyadék a bal oldali hengerből a jobb oldaliba kezd áramlani, és akkor kerül nyugalmi állapotba, amikor a folyadékoszlop magassága mindkét hengerben $H/2$ lesz (47. *b)* ábra). Most számítsuk ki a folyadék potenciális energiáját a kezdeti és a végállapotban! Ezt úgy kapjuk, hogy mindkét hengerben a folyadék súlyát megszorozzuk a folyadékoszlop magasságának félérté-



47. ábra

kével. Ily módon arra az eredményre jutunk, hogy a kezdeti állapotban a potenciális energia $GH/2$, míg a végállapotban $(G/2)(H/4)+(G/2)(H/4) = GH/4$ lesz.

Tehát a folyadék potenciális energiája a végállapotban a kezdeti energia felére csökken. Kérdés, hogy hová lett a kezdeti energia fele?

Első diák: Megpróbálom az Ön által javasolt vizsgálati eljárással értelmezni a feladatot. A hiányzó $GH/4$ energiát a folyadék közölhette más testtel, illetve az a súrlódáskor keletkezett hőképzésre vagy magának a folyadéknak a kinetikus energiája növelésére fordítódhatott. Eddig jól értelmezem a feladatot Tanár Úr?

Tanár: Tökéletesen. Lássuk tovább!

Első diák: Az egyik edényből a másikba történő átáramlás során a folyadék semmiféle külső tárggyal nem közölt munkát; végállapotban a folyadék nem rendelkezik kinetikus energiával, mivel nyugalmi állapotba kerül; tehát arra a következtetésre kell jutnunk, hogy a potenciális energia fele azzá a hővé alakult át, amely a súrlódás révén keletkezett. Csak az a probléma, hogy nem egészen értem, miféle súrlódásról lehet itt szó.

Tanár: Ön helyesen értelmezte a feladatot és végkövetkeztetése is helytálló. Nézzük tehát, milyen súrlódással is állunk itt szemben! Képzeljük el, hogy a folyadékot rétegekre osztjuk és minden egyes rétegre meghatározzuk az átlagsebességet. Ekkor azt kapjuk, hogy az edény falához közelítve, az egyes rétegek sebessége csökken. A rétegek között azonban a molekulák kölcsönösen cserélődnek, ami azt eredményezi, hogy azokból a rétegekből, amelyeknek nagyobb az áramlási sebessége, a molekulák a kisebb sebességű rétegbe vándorolnak, és viszont. Ez a jelenség felfogható úgy is, hogy a „gyorsabb" réteg gyorsuló mozgást közöl a „lassúbb" réteggel, a „lassúbb" réteg pedig lassuló mozgásra készteti a „gyorsabb" réteget. Ennek alapján beszélhetünk a folyadékra jellemző belső súrlódásról, tulajdonképpen az egyes rétegek közötti súrlódásról. Annál jobban észlelhető ez a jelenség, minél nagyobb a folyadék középső és szélső rétegeinek sebességei közötti különbség. Itt jegyzem meg, hogy a csővezeték mentén a folyadékréteg sebességét erősen befolyásolja a folyadékmolekulák és a csővezeték molekuláinak kölcsönhatása. Ha a folyadék nedvesíti a cső falát, akkor a fallal közvetlenül érintkező réteg gyakorlatilag mozdulatlan lesz.

Első diák: Tehát végállapotban a folyadék hőmérséklete magasabb lesz, mint a kezdeti állapotban volt?

Tanár: Igen, pontosan így van. Most pedig változtassuk meg kicsit a feltételeket! Tételezzük fel, hogy a folyadék és az edény fala között semmiféle kölcsönhatás nincs, tehát a folyadék minden rétege azonos sebességgel mozog és nincs belső súrlódás sem. Hogyan megy végbe a folyadék átáramlása az egyik edényből a másikba ez esetben?

Első diák: Ebben az esetben a folyadék potenciális energiája kinetikus energiává alakul át. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a 47. *b)* ábrán bemutatott helyzetben a folyadék nem kerül nyugalmi állapotba. A folyadék átáramlása a bal oldali hengerből mindaddig folytatódik, amíg el nem éri a 47. *c)* ábrán levő állapotot. Ekkor a folyadék potenciális energiája megegyezik a 47. *a)* ábrán jelölt kezdeti állapottal.

Tanár: És mi történik a folyadékkal a továbbiakban?

Első diák: A folyadék ez után folytatja áramlását, de fordított irányban – jobbról balra. A közlekedőedényben a folyadékoszlop szintje lengő mozgást fog végezni.

Tanár: Hasonló jelenség figyelhető meg pl., ha egy üveg közlekedőedénybe higanyt töltünk. Ismeretes, hogy a higany nem nedvesíti az üveg felületét. Természetes, hogy idővel ez a lengés lecsillapodik, mivel a folyadékmolekulák és az üveg falának kölcsönhatása nem hagyható teljesen figyelmen kívül.

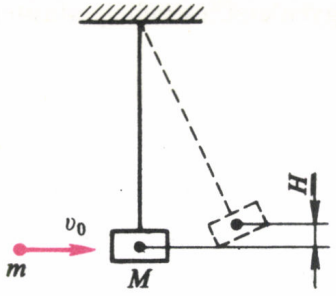
Első diák: Most látom csak, hogy az energiamegmaradás törvényét milyen sokoldalúan fel lehet használni.

Tanár: Javaslom, hogy nézzük meg a következő példát!

Egy vékony fonálra felfüggesztett M tömegű ládába becsapódik és bennragad egy vízszintes v_0 sebességgel repülő, m tömegű golyó. Milyen H magasságra lendül ki a láda a golyó becsapódása után annak következtében, hogy az M test a fonállal együtt kitér egyensúlyi helyzetéből (48. ábra)?

Első diák: Jelöljük a láda és a golyó együttes sebességét a becsapódást követő pillanatban v_1-gyel! v_1 értékét az energiamegmaradás törvényéből számítom:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)v_1^2, \tag{50}$$



48. ábra

innen pedig

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{m}{m+M}}. \tag{51}$$

E sebesség ismeretében és az energiamegmaradás törvényét a láda + golyó rendszer kinetikus és potenciális energiájára felírva, már számítható a H magasság:

$$(m+M)gH = \frac{1}{2}(m+M)v_1^2, \tag{52}$$

illetve (50) és (52) összevonásával:

$$(m+M)gH = \frac{1}{2}mv_0^2$$

és innen:

$$H = \frac{m}{m+M}\cdot\frac{v_0^2}{2g}. \tag{53}$$

Tanár: (a második diákhoz): Mit szól ehhez?

Második diák: Nem értek egyet ezzel a megoldással. Bennünket úgy tanítottak, hogy **az ütközésekre az impulzus megmaradásának törvénye érvényes.** Ezért én az (50) kifejezés helyett a következő egyenletet írnám fel:

$$mv_0 = (m+M)v_1, \tag{54}$$

vagyis a golyó ütközés előtti impulzusa egyenlő a láda + golyó ütközés utáni impulzusával. Ebből a v_1 sebesség értéke:

$$v_1 = v_0\cdot\frac{m}{M+m}. \tag{55}$$

Ezután én is felhasználom az (52) egyenletet, és behelyettesítem az (55) kifejezést, ahonnan végül kapom, hogy:

$$H = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \cdot \frac{v_0^2}{2g}. \qquad (56)$$

Tanár: Van tehát két eltérő vélemény és két különböző eredményünk. Az eltérés lényege, hogy az egyik esetben a golyó becsapódását a ládába a kinetikus energia megmaradásának elve alapján, míg a másik esetben az impulzus megmaradásának elve alapján számítjuk. Végül is kinek van igaza? (Első diákhoz): Mivel tudná megvédeni álláspontját?

Első diák: Nekem eszembe sem jutott, hogy az impulzus megmaradásának elvét használjam fel.

Tanár: (Második diákhoz): Mit mondana?

Második diák: Én sem tudom megindokolni pontosan a megoldásomat. Emlékszem, hogy az ütközésekre az impulzus megmaradásának elve mindig teljesül, ugyanakkor az energiamegmaradás elve nem mindig. Mivel jelen esetben e kétféle eljárás különböző eredményt ad, valószínű, hogy az én eredményem a helyes.

Tanár: Valóban, az Ön eredménye a helyes, azonban feltétlenül ki kell egészítenünk az „ex cathedra magyarázatot".

Az olyan ütközést, amikor az ütközést követően a két test egymáshoz ragadva (vagy pedig benne elnyelődve) együtt mozog tovább, „abszolút rugalmatlan ütközés"-nek nevezzük. Erre az ütközési típusra az a jellemző, hogy az ütköző testek maradandó alakváltozást szenvednek. Ennek következtében egy bizonyos hőmennyiség szabadul fel, tehát az (50) egyenlet, amely csak a testek kinetikus energiájával számol, nem írja le teljesen a rendszer viselkedését. A láda és a becsapódott golyóból álló rendszer sebességét az ütközés után az impulzus megmaradási törvénye (54) alapján lehet számítani.

Első diák: Ez azt jelentené, hogy az abszolút rugalmatlan ütközésre az energiamegmaradás törvénye érvénytelen? De hiszen állandóan azt hangoztattuk, hogy ez a törvény általános érvényű?!

Tanár: **Az energiamegmaradás törvénye valóban általános érvényű és az abszolút rugalmatlan ütközésre is teljesül. Nem teljesül a kinetikus energia – és csakis a kinetikus, nem pedig a teljes energia – megmaradásának feltétele.** Ha az ütközéskor felszabaduló hőmennyiséget Q-val jelöljük, akkor a fenti, abszolút rugalmatlan

ütközésre a megmaradási törvényeket a következő egyenletrendszerrel írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} mv_0 &= (m+M)v_1, \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}(m+M)v_1^2+Q. \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Itt az első egyenlet az impulzus megmaradásának, a második pedig a kinetikus energián kívül a kölcsönhatásban felszabaduló hőmennyiséget is magába foglaló energiamegmaradásnak a matematikai alakja.

Az (57) egyenletrendszer két ismeretlent tartalmaz: v_1-et és Q-t. Ha az első egyenletből kifejezzük v_1 értékét, akkor behelyettesítve azt a második egyenletbe, kiszámíthatjuk a felszabaduló Q hőmennyiséget:

$$Q = m\frac{v_0^2}{2} - \frac{(m+M)m^2v_0^2}{2(m+M)^2} = \frac{mv_0^2}{2}\left(1-\frac{m}{m+M}\right). \qquad (58)$$

Az (58) egyenletből kitűnik, hogy az ütközésnél annál nagyobb a felszabaduló hő mennyisége, minél nagyobb M értéke. Határesetben, amikor M végtelenül nagy, akkor $Q = mv_0^2/2$ értéket kapunk, vagyis a golyó teljes kinetikus energiája hővé alakul át. Ez egyébként természetes is.

Gondoljunk csak arra az esetre, amikor a golyó egy falba csapódik be!

Első diák: **És olyan ütközés létezik, amelynél nem szabadul fel hő?**

Tanár: **Igen, létezik ilyen ütközés és ezt „abszolút rugalmas ütközésnek" nevezzük. Például két acélgolyó ütközését meglehetősen jó közelítéssel tekinthetjük abszolút rugalmas ütközésnek. Az ütközés során ugyanis a golyók kizárólag rugalmas alakváltozáson mennek át,** majd visszanyerik eredeti alakjukat, **hő pedig egyáltalán nem szabadul fel.**

Első diák: Ez egyben azt is jelenti, hogy **az abszolút rugalmas ütközésre az energiamegmaradás törvénye alatt a kinetikus energia megmaradását kell érteni?**

Tanár: Természetesen.

Első diák: Akkor viszont nem értem, hogyan lehet „kibékíteni" egymással az impulzus és az energia megmaradásának törvényét. Mégpedig azért, mert az ütközés utáni sebességre ily módon két különböző egyenlet írható fel. Vagy elképzelhető, hogy az abszolút rugalmas ütközésre nem érvényes az impulzus megmaradásának törvénye?

Tanár: Az abszolút rugalmas ütközéskor mindkét törvény teljesül: mind a mechanikai energia, mind pedig az impulzus megmaradásának törvénye. Ugyanakkor semmi ok arra, hogy e két törvény „kibékülésén" főjön a fejünk, mert a rugalmas ütközés után a két test különböző sebességgel folytatja útját. Az csak az abszolút rugalmatlan ütközésre érvényes, hogy a két ütköző test azonos sebességgel mozog tovább, mert hiszen össze is ragadtak. Ugyanakkor az abszolút rugalmas ütközést követően a két test eltérő sebességgel rendelkezik, mégpedig a két ismeretlenhez szükségünk van mindkét egyenletre. Lássunk egy példát! Ütközzön az m tömegű, v_0 sebességű test a nyugalomban levő, M tömegű testtel. Tételezzük fel, hogy az ütközés következtében a mozgó test pontosan visszafelé pattan. Jelöljük az m tömegű test ütközés utáni sebességét v_1-gyel, az M tömegűét pedig v_2-vel. Az impulzus- és energiamegmaradási törvényt erre az esetre a következő alakban írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} mv_0 &= Mv_2 - mv_1, \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Felhívom a figyelmüket az első egyenletben a mínusz jelre, amely abból ered, hogy a mozgó test visszapattanását feltételeztük.

Második diák: Azt viszont nem mindig tudhatjuk előre, hogy a testek az ütközés után milyen irányban mozognak. Az például nem következhet be, hogy az m tömegű test az ütközés után is a korábbi irányban folytatja mozgását, csupán kisebb sebességgel?

Tanár: Ez lehetséges. Az (59) egyenletrendszer megoldásaként v_1-et ekkor negatív előjellel kapjuk.

Második diák: Én úgy gondolom, hogy az m test ütközés utáni mozgási iránya az m és M arányától függ.

Tanár: Pontosan így van. Ha $m < M$, akkor az m test visszapattan, ha $m = M$, akkor ütközés után az megáll, illetve ha $m > M$, akkor

m az ütközés előtti irányban folytatja mozgását, de csökkent sebességgel. Általános esetben azonban nem szükséges előre törni a fejünket azon, hogy a test milyen irányban fog az ütközést követően mozogni. Tökéletesen elegendő, ha kiválasztunk egy feltételezett mozgási irányt, és hozzálátunk a feladat számszerű megoldásához, a megoldás előjele aztán pontosan megmutatja, hogy feltételezésünk helyes volt-e.

Második diák: Mi itt csak azt az esetet vizsgáltuk, amikor a golyók mozgása az ütközés előtt és azt követően egyenes vonal mentén megy végbe. Ismeretes azonban, hogy ütközés után a testek a korábbitól eltérő irányban is haladhatnak.

Feltételezem tehát, hogy az egyenes vonalú mozgás csupán egyedi eset.

Tanár: Igaza van. Valóban az egyedi esetet vizsgáltuk, amikor az ún. centrális ütközés megy végbe, azaz a testek mozgása az ütközés előtt és azt követően a középpontjukat összekötő egyenes mentén történik. Az általános esetet, az ún. nem centrális ütközést alább tárgyaljuk. Egyelőre azonban szeretném tudni, hogy az eddig tárgyaltak érthetők-e.

Első diák: Számomra igen. **Úgy foglalnám össze, hogy minden típusú ütközésre (rugalmas és rugalmatlanra) egyaránt érvényes mind az impulzus, mind az energia megmaradásának törvénye. Egyszerűen az a különbség, hogy az ütközések eltérő jellegéből adódóan különböző matematikai kifejezések írják le a kölcsönhatások során a megmaradási törvényeket, azaz a rugalmatlan ütközésnél a mechanikai energia mellett feltétlenül figyelembe kell venni a felszabaduló hőmennyiséget is.**

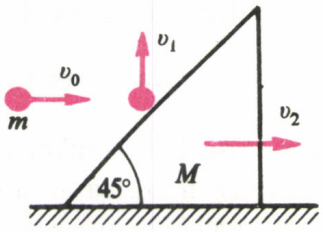
Tanár: Helyesen foglalta össze az eddig elmondottakat.

Második diák: Ha jól értettem, akkor az abszolút rugalmas, illetve abszolút rugalmatlan ütközés két határesetet jelent. Ez a két modell mindig alkalmas a reális ütközések vizsgálatára?

Tanár: Jogos a felvetése. Az általunk vizsgált ütközések valóban határesetet képviselnek. A reális ütközések alkalmával mindig számolni kell bizonyos hőmennyiség felszabadulásával, mivel abszolút rugalmas alakváltozás nem létezik, ugyanakkor igaz az is, hogy az ütköző testek különböző sebességgel folytathatják mozgásukat. Az esetek jelentős részében azonban a reális ütközéseket jó közelítéssel írja le az abszolút rugalmas, illetve abszolút rugalmatlan ütközési modell.

Nézzünk meg egy feladatot a rugalmas, nem centrális ütközésre! Egy M tömegű, 45° meredekségű lejtő a vízszintes síkon nyugalmi helyzetben van. Ezzel az M tömegű lejtővel rugalmasan ütközik a vízszintes v_0 sebességgel repülő m tömegű golyó. Az ütközés következtében a golyó függőleges irányban felpattan, a lejtő pedig a vízszintes síkban súrlódásmentesen csúszni kezd. Számítsuk ki a golyó függőleges kezdősebességét az ütközést követően (49. ábra)!

Nos, ki óhajt megbirkózni ezzel a feladattal?



49. ábra

Második diák: Ha meg tetszik engedni, akkor én megpróbálom. Jelöljük a golyó kérdéses sebességét v_1-gyel, az M test sebességét pedig v_2-vel. Mivel rugalmas ütközésről van szó, tehát felírhatjuk a kinetikus energia megmaradásának törvényét:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2. \tag{60}$$

Még egy egyenletre van szükségünk a megoldáshoz. Ennek felállításához használjuk fel az impulzus megmaradásának törvényét:

$$mv_0 = Mv_2 + mv_1. \tag{61}$$

Sajnos, az utóbbi helyességéről én nem vagyok meggyőződve, mivel v_1 iránya merőleges v_2-re.

Tanár: Valóban, a (60) egyenlet helytálló, a (61) azonban – ahogyan feltételezte – nem igaz. Emlékeztetem magukat, hogy **az impulzus megmaradási törvényét kifejező egyenlet vektorális, mivel maga az impulzus is vektor, amelynek az irányát a sebesség iránya adja.** Igaz, hogy ha a feladatban szereplő összes sebesség egy egyenes mentén helyezkedik el, akkor a vektoregyenletet skalárissal is helyettesíthetjük. Ezt tettük a centrális ütközésnél. Általános esetben azonban a sebességeket egymásra merőleges irányú összetevőikre kell felbontani, és minden irányra külön kell felírni az impulzus

megmaradási törvényét. Zárójelben jegyzem meg, hogy a vektoregyenletet síkbeli feladatoknál két skaláris egyenlettel helyettesíthetjük, amelyeket az impulzus két egymásra merőleges irányú vetülete alapján írunk fel.

Feladatunkban válasszuk ki a vízszintes és a függőleges irányt. A vízszintes irányban fennáll:

$$mv_0 = Mv_2 \tag{62}$$

A (60) és a (62) egyenletekből most már megkapjuk a keresett sebesség értékét:

$$v_1 = v_0 \frac{M-m}{M}.$$

Második diák: De mit tudunk kezdeni a függőleges iránnyal?

Tanár: Valóban, első ránézésre úgy tűnik, hogy a függőleges irányra az impulzus megmaradásának törvénye nem teljesül, mivel ütközés előtt függőleges irányú sebességünk egyáltalán nem létezett, ugyanakkor az ütközést követően van egy függőleges irányú mv_1 impulzusunk. Nem nehéz kitalálnunk, hogy az adott kölcsönhatásban még egy harmadik test is részt vesz, nevezetesen a Föld. Gondoljuk csak meg, hogy ha nem lenne a Föld, akkor az M test az ütközést követően nem vízszintesen mozdulna el! Jelöljük M_F-fel a Föld tömegét, v_F-fel pedig azt a sebességet, amelyre az ütközés során tesz szert. A súrlódás figyelmen kívül hagyása módot ad arra, hogy az M test a Föld felszínével csakis függőleges irányban lépjen kölcsönhatásba. Más szavakkal: a Föld v_F sebessége függőlegesen lefelé irányul. Ily módon tehát a Föld részvétele az ütközésben nem módosítja a (62) egyenletet, amely megadja a mozgásmennyiség megmaradását a vízszintes irányban. A függőleges irányú impulzus megmaradására ellenben ezt kell írni:

$$mv_1 - M_F v_F = 0. \tag{63}$$

Második diák: Ha a kölcsönhatásban a Föld is részt vesz, akkor bizonyára módosítani kell a (60) egyenletet.

Tanár: Konkrétan mire gondol?

Második diák: Szerintem az egyenletet ki kell egészíteni a Föld ütközés utáni mozgási energiájával:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}M_F v_F^2. \tag{64}$$

Tanár: Teljesen logikus, amit javasol. Gyakorlatilag azonban erre nincs szükség. Fejezzük ki a (63) egyenletből a Föld sebességét:

$$v_F = v_1 \frac{m}{M_F}.$$

Mivel a Föld M_F tömege nagyon nagy, a v_F sebesség gyakorlatilag nulla lesz. Most pedig hozzuk a (64) egyenletben szereplő $M_F v_F^2/2$ tagot a következő alakra: $(M_F v_F) v_F/2$! Az $M_F v_F$ szorzat a (63) egyenlet szerint véges értékű. Ha ezt a véges számot a $v_F = 0$ értékkel megszorozzuk, akkor ismét nullát kapunk. Ebből az derül ki, hogy a Föld egészen különös módon vesz részt a kölcsönhatásban: felvesz bizonyos impulzust, ugyanakkor nem kap energiát. Más szavakkal: az impulzus megmaradásában részt vesz, az energia megmaradásában azonban nem. Ez az eset különösen világosan szemlélteti azt a tényt, hogy az impulzus és az energia megmaradásának törvénye lényegét tekintve eltér, és független egymástól.

Most pedig oldjuk meg a következő példát!

A vízszintes síkban nyugalomban levő golyóval egy ugyanolyan tömegű golyó ütközik. Az ütközés abszolút rugalmas és nem centrális. Bizonyítsuk be, hogy az ütközés következtében a golyók egymásra merőleges irányban mozdulnak el!

Első diák: Az x tengelyt a második golyó ütközés előtti mozgási iránya mentén veszem fel. Ennek a golyónak a sebességét v_0-lal jelölöm. Legyen az ütközés után ennek a második golyónak a sebessége v_1 és az x tengellyel α szöget zárjon be, míg a nyugalmi helyzetéből kimozdított első golyó sebessége v_2, iránya pedig β. Bizonyítandó, hogy $\alpha + \beta = 90°$.

Tanár: Egészen jól átfogalmazta a feladatot.

Első diák: Írjuk fel az ütközésre a megmaradási törvényeket (balról az ütközés előtti, jobbról pedig az ütközés utáni mennyiségek szerepelnek):

a) az energiamegmaradás törvénye:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

b) az impulzus megmaradási törvénye a vektor x-vetületére:

$$mv_0 = mv_1 \cos\alpha + mv_2 \cos\beta;$$

c) az impulzus megmaradási törvénye a vektor *y*-vetületére:

$0 = mv_1 \sin \alpha - mv_2 \sin \beta.$

Az egyenleteket elosztva az m tömeggel, a következő alakokat kapjuk:

$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2,$
$v_0 = v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta,$
$0 = v_1 \sin \alpha - v_2 \sin \beta.$

De hogyan tovább?

Második diák: Azt hiszem, én tudom, hogyan. Emeljük négyzetre a második és harmadik egyenletet, majd összegezzük azokat:

$v_0^2 = v_1^2 + 2v_1v_2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + v_2^2.$

Egyenlővé téve ezt az első egyenlettel, kapjuk, hogy:

$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0,$

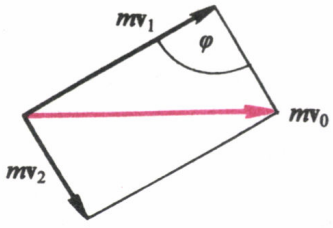
illetve: $\cos (\alpha + \beta) = 0.$

Tehát: $\alpha + \beta = 90°$

Tanár: Teljesen logikus a bizonyítás, van azonban erre egy egyszerűbb mód is. Az impulzusvektort ne bontsuk fel az x és y irányú összetevőire, hanem alkalmazzuk közvetlenül az

$m\mathbf{v}_0 = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2$

vektoriális egyenletet! Ezt az egyenletet az 50. ábrán bemutatott paralelogramma szemlélteti. Világos, hogy a paralelogramma egy-



50. ábra

ben az impulzus megmaradási törvényét is mutatja. A tömeggel egyszerűsítve és a cosinustétel alkalmazásával felírhatjuk a következő egyenletet:

$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \varphi .$

Mivel az energiamegmaradás értelmében $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$, tehát rögtön kapjuk, hogy $\varphi = 90°$.

Második diák: Ez valóban egyszerűbb bizonyítás.

Tanár: Azt sem árt észrevennünk, hogy ez a bizonyítás igen jól kiemeli az impulzus megmaradási törvényének vektoriális jellegét.

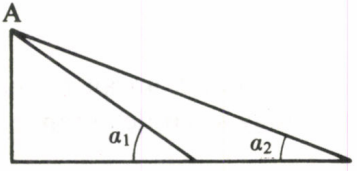
Feladatok:

40. Egy 3 kg tömegű test egy bizonyos magasságból 2 m/s kezdősebességgel esik függőlegesen lefelé. Számítsuk ki a közegellenállási erő által 10 s alatt kifejtett munkát, ha ismeretes, hogy ez alatt az idő alatt a test sebessége 50 m/s-ra nő! A közegellenállási erőt állandó értékűnek fogadjuk el.

41. Egy test előbb egy 30°-os meredekségű lejtőn, majd pedig a vízszintes síkban csúszik.

Határozzuk meg a súrlódási együttható értékét, ha ismeretes, hogy a test a vízszintes síkban ugyanannyi utat tesz meg, mint a lejtőn!

42. Az A pontból az 51. ábrán bemutatott két eltérő meredekségű lejtőn kezdősebesség nélkül csúszik le két teljesen azonos test. Számítsuk ki a lejtők alján mért v_1/v_2 sebességek hányadosát, ha: *a)* a csúszás súrlódásmentes; *b)* a súrlódási együttható mindkét esetben: μ.



51. ábra

43. Egy $M = 36$ kg tömegű fiú egy $m = 1$ kg tömegű követ a korlátnak támaszkodva $v = 14$ m/s vízszintes sebességgel tud eldobni. A Földhöz viszonyított mekkora v sebességgel tudja a követ az előbbi erővel eldobni, ha most korcsolyával sima jégen áll? Mekkora l távolságra csúszik el a fiú, ha a jégen a súrlódási együttható: $\mu = 0{,}02$?

44. Egy m tömegű, V térfogatú golyót H magasságból a vízbe ejtünk, ahol az h mélységig merül, majd vissza kiugrik a vízből, mivel kisebb a sűrűsége, mint a vízé. Számítsuk ki a víz közegellenállását, ha az konstans értékű, illetve azt a h_1 magasságot,

amelyre a golyó a vízből felpattan! A levegő közegellenállása elhanyagolható.

45. Egy 12 km/ó sebességgel haladó, 50 t tömegű vagon egy 30 t tömegű, álló vagonba fut, majd az automatikus kapcsolókorong azonnal összeköti azokat. Számítsuk ki a két vagon együttes sebességét az ütközés után! Számítsuk ki a két vagon által együtt megtett utat, ha a súrlódási erő a súlyok 5%-át teszi ki!

46. Egy α meredekségű lejtő lábánál álló, M tömegű ágyúból vízszintes irányban egy m tömegű testet v_0 kezdősebességgel lövünk ki. Milyen magasra csúszik fel az ágyú a lejtőn a reakcióerő következtében, ha a súrlódási együttható értéke μ?

47. Egy $M_1 = 100$ kg tömegű cölöpöt egy $M_2 = 300$ kg tömegű ejtősúllyal verünk a talajba. A súly $H = 4$ m magasságból szabadon esik a cölöpre, és minden egyes alkalommal $h = 10$ cm mélységgel süllyeszti azt a talajba. Számítsuk ki a talaj konstansnak feltételezett F ellenállási erejét, ha *a)* az ejtősúly és a cölöp ütközése abszolút rugalmas; *b)* ha az ütközés rugalmatlan.

48. Egy vízszintes lapon v_0 sebességgel súrlódásmentesen mozog az $m_1 = M$ tömegű golyó, majd ütközik a nyugalomban levő m_2 golyóval. Az ütközés abszolút rugalmatlan. Számítsuk ki a golyók ütközés utáni v sebességét és az ütközés során felszabaduló Q hőmennyiséget, ha: *a)* $m_2 = M/2$; *b)* $m_2 = M$; *c)* $m_2 = 2M$.

49. A vízszintes síkban nyugalomban levő M golyóval abszolút rugalmasan és nem centrálisan ütközik egy m tömegű, v_0 sebességű golyó. Az ütközés következtében az m golyó sebessége az eredeti irányra merőleges lesz. Számítsuk ki a golyók sebességét az ütközést követően, illetve az M golyó sebességének irányát is, valamint az m golyó energia- és impulzusváltozását az ütközés következtében.

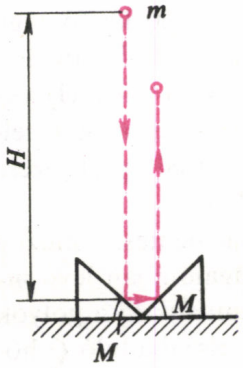
50. Egy függőleges faltól $l = 3$ m távolságra a sima vízszintes felületen egy M tömegű golyó nyugalomban található. Egy másik, m tömegű golyó a faltól az M golyó felé közelít egy bizonyos sebességgel, majd az abszolút rugalmas ütközést követően az visszapattan a falnak, attól pedig előre és ismét utoléri az M golyót. Számítsuk ki a második ütközésnek a faltól mért távolságát, ha a golyók tömegeinek aránya: $M/m = n = 5$.

51. Egy közös pontban l hosszúságú fonalakra felfüggesztünk egy M és egy $2M$ tömegű golyót. Az M tömegű golyót α szögben kimozdítjuk, majd a nyugalmi helyzet felé mutató, érintőleges irányú v_0 kezdősebességgel ellökjük azt. Milyen magasra lendülnek

ki a golyók nyugalmi helyzetükből, ha: 1. az ütközés abszolút rugalmas, illetve, 2. az ütközés abszolút rugalmatlan (azaz a golyók összeragadnak)?

52. Egy M tömegű test egy l hosszúságú fonálon függ. Ebbe a golyóba becsapódik egy m tömegű, vízszintesen repülő golyó és bennragad. Minimálisan mekkora sebességgel kell repülnie a golyónak ahhoz, hogy a becsapódás következtében azok a fonálon a függőleges síkban teljes kört tudjanak megtenni?

53. A vízszintes síkban két darab 45°-os meredekségű, egyenként M tömegű ék fekszik (52. ábra). A H magasságból szabadon esik



52. ábra

le egy m tömegű ($m \ll M$) golyó, amely előbb az egyik, majd a másik ékkel ütközik, és függőleges irányban felpattan. Számítsuk ki, milyen magasra repül fel a golyó, ha feltételezzük, hogy mindkét ütközés rugalmas, és az ék és a vízszintes sík között nincs súrlódás!

54. M tömegű ékre, mely a vízszintessel 30°-os szöget zár be H magasságból esik egy golyó (tömege m). Rugalmas ütközés után a vízszintessel 30°-os szögben visszapattan. Mekkora h magasságra emelkedik a golyó, ha az ék és az alátámasztási felület súrlódását elhanyagoljuk?

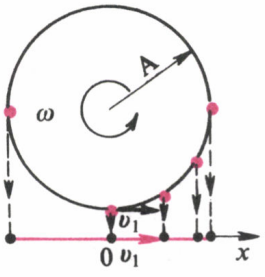
11. ISMERIK-E A HARMONIKUS REZGÉSEK TÖRVÉNYSZERŰSÉGEIT?

Tanár: Egyes felvételizőknél előfordul, hogy nem ismerik eléggé a harmonikus rezgések törvényszerűségeit. Mielőtt ezek helyes értelmezését megvitatnánk, lássuk előbb magát a harmonikus rezgés meghatározását!

Első diák: **Harmonikusnak nevezzük az olyan rezgőmozgást, amelynél a test nyugalmi helyzetétől mért x kitérését a következő kifejezés írja le:**

(65)

ahol A – a rezgés amplitúdója (a test maximális kitérése az egyensúlyi helyzettől); ω – a körfrekvencia, ($\omega = 2\pi/T$, ha T a rezgés periódusideje); α – a kezdeti fázisszög (amely azt mutatja, hogy a $t = 0$ időben a test mennyire tér ki az egyensúlyi helyzettől). A harmonikus rezgést jól szemlélteti az A sugarú kör mentén ω szögsebességgel mozgó pont merőleges vetülete egy adott egyenesre (53. ábra).



53. ábra

Második diák: Én egy másik meghatározást jobbnak látok. Ismeretes, hogy a rezgések a mozgatóerő, vagyis azon erő hatására mennek végbe, amely az egyensúlyi helyzet irányába mutat, nagysága pedig attól távolodva növekvő értéket vesz fel. Ezen belül **harmonikus-**

nak nevezzük az olyan rezgőmozgást, amelynél az F mozgatóerő egyenesen arányos a test egyensúlyi helyzetétől mért x kitérési távolsággal:

$$F = kx. \tag{66}$$

Az ilyen erőt „rugalmassági" erőnek nevezzük.

Tanár: Számomra mindkét meghatározás tökéletesen kielégítő. **Az első meghatározás magát a mozgatási módot mint ismertetőjelet, a második pedig a mozgást előidéző okot használja fel kritériumként. Mondhatnám így is, hogy az első meghatározás a rezgőmozgást térben és időben (kinematikai módszer), míg a második okozati oldaláról (dinamikai módszer) vizsgálja.**

Második diák: Mégis, a két meghatározás közül melyiket kell előnyben részesíteni? Esetleg mindkettő ekvivalens?

Tanár: Nem, a két meghatározás nem ekvivalens. Az első, a kinematikai meghatározás pontosabb, mert teljesebb.

Második diák: De a mozgatóerő jellege szerintem egyúttal magát a rezgőmozgást is megszabja. Nem értem, miért nyújt kevesebbet az általam adott meghatározás?

Tanár: Nem egészen igaz az elképzelése, mert a mozgatóerő jellege még nem determinálja egyértelműen a rezgőmozgás sajátosságait.

Első diák: Gondolom, itt ismét arról van szó, amit a 4. órában tárgyaltunk, nevezetesen, hogy a test mozgásformáját egy adott pillanatban nemcsak a vizsgált időben reá ható erők, hanem a hatóerők és a kezdeti feltételek, vagyis a test kiindulási helyzete és sebessége együttesen szabják meg.

Tanár: Pontosan erről van szó. A mi esetünkben konkrétan ez azt jelenti, hogy **a rezgőmozgás formáját nemcsak a mozgatóerő, hanem azok a feltételek is befolyásolják, amelyek a rezgés kezdetekor uralkodtak.** Világos, hogy a rezgőmozgás különféle módon kelthető. Az egyik módszer lehet, ha a testet a nyugalmi helyzetéből kitérítve szabadon elengedjük és az rezgésbe jön. Ha a rezgés kezdeti idejét nullának vesszük, akkor a (65) egyenletből azt kapjuk, hogy $\alpha = \pi/2$, a kitérítési távolság pedig a rezgés amplitúdójának felel meg. A testet egyensúlyi helyzetéből különféle távolságokra téríthetjük ki, ily módon eltérő amplitúdójú rezgéseket kelthetünk. A másik módszer lehet pl., ha a nyugalmi helyzetben levő testnek egy kezdősebességet adunk (meglökjük), és az így jön rezgésbe. A rezgés kezdeti idejét nullának véve, most a (65) kifejezés alapján

$\alpha = 0$ értéket kapunk. A rezgés amplitúdója attól függ, hogy mekkora kezdősebességet közöltünk a testtel. Világos, hogy a rezgéskeltésnek számtalan módja lehetséges, amelyek azonban a fenti kettő között átmeneti helyet foglalnak el, pl. a testet kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, ugyanakkor kezdősebességet is adunk neki. Minden egyes módszer egy bizonyos A amplitúdó és α kezdeti fázisszögértékhez vezet.

Második diák: Tehát végeredményben A és α értéke nem függ a mozgatóerő jellegétől?

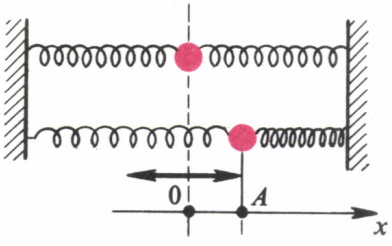
Tanár: Így van. A és α értékeit saját magunk szabjuk meg azzal, hogy a rezgéskeltés egy meghatározott módját választjuk. A mozgatóerő, vagyis a (66) kifejezésben szereplő k együttható viszont csupán az ω körfrekvenciát, azaz a rezgés periódusát határozza meg. Úgy is mondhatnánk, hogy a rezgés periódusa a rezgő test saját jellemzője, ugyanakkor az amplitúdó és a kezdeti fázisszög értéke az adott rezgést létrehozó külső hatástól függ.

Visszatérve a harmonikus rezgés fenti meghatározásaira, láthatjuk, hogy a dinamikai meghatározás semmiféle felvilágosítást nem nyújt sem a rezgés emplitúdójára, sem pedig a kezdeti fázisszög értékére vonatkozóan, ugyanakkor a kinematikai meghatározásban ez benne foglaltatik.

Második diák: Ha az amplitúdót saját magunk is megszabhatjuk, akkor ez egyáltalán fontos paramétere a rezgőmozgásnak?

Tanár: De még mennyire fontos, és e felől semmi kétség sem lehet. Világítsuk meg ezt egy példával! Egy m tömegű golyót két rugó közé erősítünk és azt A amplitúdóval vízszintes rezgésbe hozzuk (54. ábra). A mozgatóerőt a rugók rugalmassági tulajdonságaira jellemző k rugalmassági együttható határozza meg. Számítsuk ki a rezgő golyó energiáját.

Első diák: A golyó energiájának kiszámításához vizsgáljuk meg azt a maximális kitérési helyzetben, amikor $x = A$! Ekkor a golyó se-



54. ábra

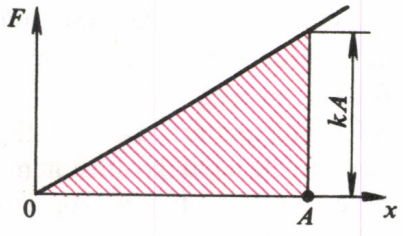
bessége nulla, tehát a teljes energia egyedül a potenciális energiából áll. Ezt a mozgatóerő ellenében, a kitérés során végzett munkával tesszük egyenlővé, így a következő értéket kapjuk:

$$W = FA. \tag{67}$$

Behelyettesítve ide a (66) szerint az $F = kA$ értékét, kapjuk:

$$W = kA^2.$$

Tanár: Vizsgálati módja helyesnek tekinthető, azonban menet közben elkövetett egy hibát. Megfeledkezett arról, hogy a (67) kifejezés csak arra az esetre érvényes, ha az F erő konstans. Esetünkben azonban az erő értéke a távolsággal az 55. ábrán bemutatott gra-



55. ábra

fikon szerint változik. Az erő által kifejtett munkát az $x = A$ távolságban a görbe alatti vonalazott terület fejezi ki. Ennek a háromszögnek a területe egyenlő $kA^2/2$-vel. Az energia értéke tehát

$$W = k\frac{A^2}{2}. \tag{68}$$

Felhívnám a figyelmüket arra, hogy a rezgőmozgást végző test teljes energiája arányos a rezgés amplitúdójának négyzetével, tehát az amplitúdó valóban fontos paramétere a rezgőmozgásnak. Ha $0 < x < A$, akkor a W teljes energia a kinetikus és a potenciális energia összege lesz:

$$W = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv + \frac{1}{2}kx^2. \tag{69}$$

A (69) egyenlet alapján az egyensúlyi helyzettől mért bármely x távolságban kiszámíthatjuk a test pillanatnyi sebességét. Most pedig feleljünk arra a kérdésre, hogy mivel egyenlő az 54. ábrán bemutatott golyó periódusideje?

Második diák: A periódusidő egyenletének kifejezéséhez a differenciálszámításhoz kell folyamodnunk.

Tanár: Valóban, általános esetben ez a helyzet. Ha azonban egyidejűleg felhasználjuk a harmonikus rezgés kinematikai és dinamikai meghatározását, akkor differenciálszámítás nélkül is kiszámíthatjuk az eredményt. Valóban, a harmonikus rezgés kinematikai meghatározásának grafikus ábrázolása alapján (53. ábra) megállapíthatjuk, hogy a test sebessége az egyensúlyi helyzetben való áthaladás pillanatában:

$$v_1 = \omega A = A \cdot \frac{2\pi}{T}. \tag{70}$$

A dinamikai meghatározásból kiindulva levezetett (68) kifejezés alapján viszont a v_1 sebességet megkaphatjuk a következő energetikai összefüggés alapján:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kA^2, \tag{71}$$

mivel az egyensúlyi helyzetben való áthaladás pillanatában a golyó teljes energiáját a kinetikus energia szolgáltatja. A (70) és (71) kifejezések összevonásával kapjuk, hogy

$$\frac{4\pi^2 A^2 m}{T^2} = k \cdot A^2,$$

azaz

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{72}$$

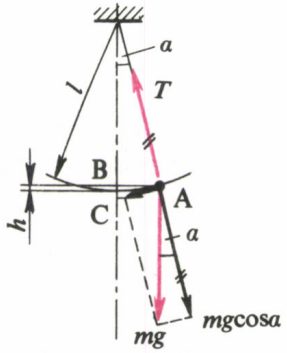
Korábban már említettük, hogy **a rezgés periódusidejét magának a rezgő rendszernek a tulajdonságai szabják meg, és az nem függ a rezgőmozgás keltési módjától.**

Első diák: A rezgőmozgás tárgyalásakor a középiskolában általában nem a rugóhoz rögzített golyó, hanem a fonálinga mozgását vizsgáltuk. Nem általánosíthatnánk a fenti eredményeket a fonálinga esetére?

Tanár: Az általánosítás előfeltétele, hogy tisztázzuk: a fonálinga esetében mi játssza a k rugalmassági modulus szerepét, hiszen a fonálinga a valóságban nem a rugalmassági, hanem a gravitációs erő

hatására végzi lengőmozgását. Vizsgáljuk meg az 56. ábrán bemutatott fonálingát, ha az l hosszúságú fonálon függő golyót az egyensúlyi helyzetéből α szögben kitérítjük! A golyóra két erő hat: az mg nehézségi erő és a fonál T húzóereje. Ezeknek az eredője a mozgatóerő, amelynek az értéke a rajzon is jól láthatóan: $mg \sin \alpha$.

Első diák: És a fonálinga esetében a kitérés melyik érték, az AB vagy az AC szakasz (lásd 56. ábra!)?



56. ábra

Tanár: Azt feltételeztük, hogy fonálingánk harmonikus lengőmozgást végez. Ennek pedig feltétele, hogy a tárgy maximális kitérése az egyensúlyi helyzettől csak kismértékű lehet, azaz:

$$\alpha \ll 1, \tag{73}$$

ha az α szöget radiánban fejezzük ki, illetve $\alpha < 10°$. A (73) feltétel teljesülése esetén viszont az AB és AC szakaszok különbsége elhanyagolható, azaz

$$\mathrm{AB} = l \sin \alpha \approx \mathrm{AC} = l \operatorname{tg} \alpha.$$

Ezzel a kérdés most már nem is lényeges. Az egyértelműség kedvéért azonban válasszuk az $x = \mathrm{AB} = l \sin \alpha$ távolságot és ennek alapján írjuk fel a (66) egyenletet a fonálingára vonatkoztatva:

$$mg \sin \alpha = kl \sin \alpha, \tag{66. a}$$

Innen k értéke:

$$k = \frac{mg}{l}. \tag{74}$$

Behelyettesítve ezt a (72) kifejezésbe, megkapjuk a harmonikus lengőmozgást végző fonálinga periódusidejének egyenletét:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{75}$$

Vizsgáljuk meg a fonálinga energiaviszonyait is. Az könnyen belátható, hogy az inga teljes energiáját az *mgh* kifejezés adja, ha *h* az inga maximális emelkedési magassága (lásd 56. ábra!). Tehát:

$$W = mgh = mgl(1 - \cos\alpha) = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{76}$$

A (76) kifejezés azonban bármely α értékre érvényes. Ha teljesül a fonálinga harmonikus lengő mozgását korlátozó (73) egyenlőtlenség, akkor ez a kifejezés is a (68) egyenletet adja. De ekkor már $\sin\alpha$ értékét jó közelítéssel helyettesíthetjük a szög radiánban kifejezett értékével és a (76) kifejezést a következő alakban írhatjuk fel:

$$W \approx 2mgl\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = mgl\frac{\alpha^2}{2}.$$

Innen a (74) figyelembevételével kapjuk a végső alakot:

$$W = \frac{1}{2}k(l\alpha)^2 \approx \frac{1}{2}k(\mathrm{AB})^2.$$

Tehát ismét a (68) kifejezést kaptuk eredményül.

Második diák: Ha jól emlékszem, amikor mi az ingát tanultuk, semmiféle korlátozást nem alkalmaztunk a kitérítés mértékére vonatkozóan.

Tanár: Ez a korlátozás valóban felesleges, ha a golyó energiájára vagy a fonál feszítőerejére vagyunk kíváncsiak. Ebben az esetben azonban gyakorlatilag nem is a fonálinga mozgását, hanem a golyónak a függőleges síkban levő körpályán való mozgását vizsgáljuk. Ha azonban a feladatban szerepel a lengés periódusideje [a (75) kifejezés], akkor az inga lengő mozgása feltétlenül harmonikus kell hogy legyen, következésképpen a tárgy kitérése csak kismértékű lehet. Például az 56. feladatban az inga kitérésének mértéke nem lényeges, míg az 57. feladatban annak nagy jelentősége van.

Második diák: Az egyik fizikakönyvben olvastam a Lissajous-görbéről, de nem tudom, mi lehet az.

Tanár: A Lissajous-görbe egy olyan testnek a pályáját írja le, amely egyidejűleg két, egymásra merőleges lengésben vesz részt. Tételezzük fel, hogy az x és az y tengely mentén is végbemegy egy-egy rezgőmozgás. Az egyszerűség kedvéért a két rezgés frekvenciáját és amplitúdóját vegyük azonosnak. A $t = 0$ időben az egyensúlyi helyzettől mért kitérés értéke az x tengely mentén legyen egyenlő az amplitúdóval, míg az y mentén nulla. Erre az esetre a következő két egyenlet írható fel:

$$\left.\begin{aligned} x &= A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos \omega t, \\ y &= A \sin \omega t. \end{aligned}\right\}$$

Az egyenleteket négyzetre emeljük, majd összegezzük:

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

Ez egy A sugarú kör egyenlete. Tehát ebben az esetben a test az xy síkban egy kör alakú Lissajous-görbét ír le.

Most pedig határozzák meg Önök a Lissajous-görbe alakját abban az esetben, ha a $t = 0$ időben mindkét tengely irányában nulla a kitérés.

Második diák: Erre az esetre írhatjuk:

$$\left.\begin{aligned} x &= A \sin \omega t, \\ y &= A \sin \omega t. \end{aligned}\right\}$$

Tehát $y = x$, így a Lissajous-görbe az adott esetben egy egyenes.

Tanár: Helyes. Ha az x és y rezgések kezdeti fázisértékei 0 és $\pi/2$ határok közé esnek, akkor a Lissajous-görbe egy ellipszis lesz. Ha az x és y rezgések frekvenciái egymástól eltérnek, akkor a Lissajous-görbe még bonyolultabb lesz. Próbáljuk meg önállóan meghatározni pl. a következő esetben a Lissajous-görbét és felrajzolni azt:

$$\left.\begin{aligned} x &= A \sin \omega t. \\ y &= A \cos \omega t. \end{aligned}\right\}$$

Második diák: Egyetlen kérdést nem értek egészen. Azt tetszett mondani, hogy az ingának a lengési ideje az saját jellemzője, amit nem tudunk befolyásolni. Miért van mégis, hogy a hintát olyan lengési idővel tudom mozgásba hozni, amilyennel csak akarom?

Tanár: Ez valóban így van. Mi viszont az eddigi vizsgálódás során mindig saját lengést vizsgáltunk, vagyis az ingát elindítottuk és magára hagytuk. Az ilyen lengés ω_0 frekvenciája valóban nem tőlünk függ, hanem azt az inga hossza szabja meg. Ha azonban az ingát ω frekvenciával hozzuk mozgásba (vagyis az ingára ω frekvenciával jellemzett erővel hatunk), akkor már az ω frekvenciájú kényszerlengésről beszéltünk. Ezt a frekvenciát valóban mi „szabályozzuk".

Érdekes megjegyezni, hogy ha a mozgatóerő ω frekvenciája egybeesik a saját frekvenciával ($\omega = \omega_0$), akkor a rezgés amplítúdója rendkívül megnő. Ezt a jelenséget rezonanciának nevezik.

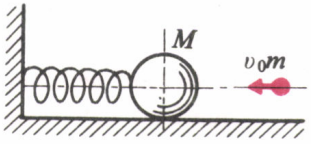
Feladatok:

55. Egy golyó az 54. ábrán bemutatott módon rezgőmozgást végez. Számítsuk ki a golyó pillanatnyi sebességének hányadosát az egyensúlyi helyzettől mért 1/2, illetve 1/3 amplitúdónyi távolságban!

56. A fonálra felfüggesztett golyót egyensúlyi helyzetéből 60°-ra kimozdítjuk és elengedjük. Számítsuk ki az egyensúlyi helyzetben, illetve a maximális kitérési helyzetben a fonálra ható feszítőerők hányadosát!

57. Egy fonálingát 5°-ra kitérítünk. Számítsuk ki a golyó sebességét az egyensúlyi helyzetben való áthaladás pillanatában, ha az inga körfrekvenciája 2 s^{-1}!

58. Egy sima, vízszintes asztalon egy k rugalmassági modulussal rendelkező rugóhoz erősített, M tömegű golyó fekszik (57. ábra).



57. ábra

Ezzel a golyóval a rugó tengelyével ellentétes irányból egy m tömegű, v_0 sebességű golyó abszolút rugalmatlanul ütközik. Számítsuk ki a golyó A rezgési amplitúdóját és T periódusidejét, ha a rugó tömege elhanyagolható!

12. MI TÖRTÉNIK AZ INGÁVAL A SÚLYTALANSÁG ÁLLAPOTÁBAN?

Tanár: Verjünk egy lift oldalába szeget, függesszünk rá egy fonálingát, és hozzuk az ingát harmonikus lengő mozgásba! Mivel egyenlő az inga lengési ideje, ha a lift a gyorsulással mozog fölfelé?

Első diák: Ha a lift fölfelé mozog, általában úgy érezzük, hogy testünk súlya megnő. Valószínű, ezt kell „éreznie" az ingának is. Úgy gondolom, hogy ebben az esetben az inga lengési idejét a következő kifejezés adja meg:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}}. \tag{77}$$

Nem tudnám azonban pontosan megindokolni ezt a kifejezést.

Tanár: Eredménye helyes. A magyarázathoz azonban az eddigiektől eltérő módszerhez kell folyamodnunk. Eddig ugyanis többnyire inerciarendszerekben vizsgáltuk az egyes testek mozgását és kerültük a neminerciális rendszerek alkalmazását. Sőt, én magam javasoltam (lásd 4. óra), hogy lehetőleg kerülni kell azokat. Ezen az órán azonban célszerű a neminerciális rendszer alkalmazása, amelyet a gyorsuló lifthez rögzítünk. **Emlékezzenek arra, hogy ha egy m tömegű test mozgását az a gyorsulással rendelkező neminerciális rendszerben vizsgáljuk, akkor a testhez formálisan egy kiegészítő – ún. tehetetlenségi – erőt kell rendelnünk, amelynek az értéke ma, iránya pedig a gyorsulással ellentétesen mutat. Miután a testhez hozzárendeltük a tehetetlenségi erőt, nyugodtan elfeledhetjük, hogy a rendszer gyorsuló mozgást végez és a test mozgását ugyanúgy vizsgálhatjuk, mint az inerciarendszerben tettük.** A lift esetében tehát a golyóhoz ma erőt kell hozzárendelnünk, amely az mg nehézségi erőhöz hasonlóan, nagyságát és irányát tekintve konstans, és az iránya egybeesik a nehézségi erő irányával. Ebből következik,

hogy a (75) kifejezésben a g gyorsulást a $(g+a)$ összeggel kell helyettesíteni. Ez pedig a (77) kifejezést adja.

Első diák: Ez egyben azt is jelenti, hogy ha a lift lefelé mozog a gyorsulással, akkor az inga lengési idejét a $(g-a)$ gyorsulások különbsége szabja meg? Azért gondolom ezt, mert most viszont az *ma* tehetetlenségi erő a nehézségi erővel ellentétes irányú.

Tanár: Természetesen így van. Ebben az esetben az inga lengési ideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}}. \tag{78}$$

Ennek a kifejezésnek akkor van értelme, ha $a < g$. Minél jobban megközelíti az a értéke a g-t, annál nagyobb lesz az inga lengési ideje. Ha pedig $a = g$, akkor fellép a súlytalanság állapota. Mi történik ekkor az ingával?

Első diák: Ebben az esetben, a (78) kifejezés alapján az inga lengési ideje végtelenül nagy lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy az inga mozdulatlanná válik.

Tanár: Itt azért egy kis helyesbítésre van szükség. Tételezzük fel, hogy az inga a liftben leng, amikor a felvonókötél hirtelen elszakad, és a lift szabadon esik lefelé (a levegő közegellenállását elhanyagolhatjuk). Mi történik tehát a lifttel?

Első diák: Ahogyan az előbb is említettem, az inga mozdulatlanná válik.

Tanár: Pontosan itt kell korrigálnom Önt. Az inga valóban mozdulatlanná lesz (természetesen a lifthez viszonyítva), ha a leszakadás pillanatában éppen a szélső kilengési helyzetben volt. Ha azonban ettől eltérő helyzetben volt, akkor a súlytalanság állapotában a golyó a fonálon függőleges síkban egyenletes körmozgást fog végezni azzal a sebességgel, amellyel a leszakadás pillanatában éppen rendelkezett.

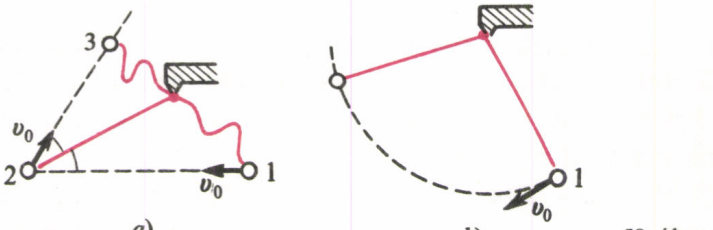
Első diák: Igen, értem.

Tanár: Akkor írja le, hogyan viselkedik a fonálinga (a fonálra kötött golyó) a súlytalanság állapotában levő űrhajóban!

Első diák: Az űrhajóban a golyó vagy nyugalmi helyzetben marad (az űrhajóhoz viszonyítva), vagy pedig egyenletes körmozgást végez a fonál hosszának megfelelő sugarú kör mentén (természetesen csak akkor, ha nem ütközik a falba).

Tanár: Ez a kép még kiegészítésre szorul. Tegyük fel, hogy mi magunk

is a súlytalanság állapotában levő űrhajóban tartózkodunk. Függesszük fel a fonálingákat úgy, hogy sem az űrhajó fala, sem pedig a mennyezete ne zavarja a golyót mozgásában, és óvatosan engedjük el azt. Az elengedett golyó nyugalomban marad. De két esetet kell megkülönböztetnünk: 1. ha a fonál feszül, 2. ha a fonál laza. Lássuk az első esetet (58. *a)* ábra, 1. helyzete)! Adjunk a testnek egy v_0 kezdősebességet! Ennek következtében a golyó egyenesvonalú egyenletes mozgást fog végezni mindaddig, amíg a fonál meg nem feszül (58. *a)* ábra 2. helyzete). Ebben a helyzetben a golyóra



58. ábra

a fonál reakcióereje hat, amelyet a falba ütköző labda esetében a fal reakcióerejéhez hasonlíthatnánk. Ekkor a golyó hirtelen megváltoztatja mozgási irányát és ismét egyenesvonalban egyenletesen mozog (58. *a)* ábra 3. helyzete felé). Erre a különleges „visszaverődésre" is teljesülnie kell azonban a beesési és visszaverődési szögek egyenlőségének. Most pedig lássuk a második esetet! Itt először kifeszítjük a fonalat, majd a golyót óvatosan elengedjük. A golyó ugyanúgy mozdulatlan marad egy fix helyzetben, mint azt az első esetben tette (58. *b)* ábra 1. pont). Közöljük a golyóval a fonálra merőleges irányú v_0 sebességet. Ekkor a golyó a fonálon egyenletes körmozgásba kezd. A forgási síkot a fonál és a kezdősebesség vektora szabja meg.
Nézzük meg a következő feladatot!

Az l hosszúságú fonálinga egy kiskocsira van felerősítve, amely egy α meredekségű lejtőn súrlódásmentesen csúszik lefelé (59. *a)* ábra). Számítsuk ki az inga lengési idejét ebben a gyorsuló rendszerben!

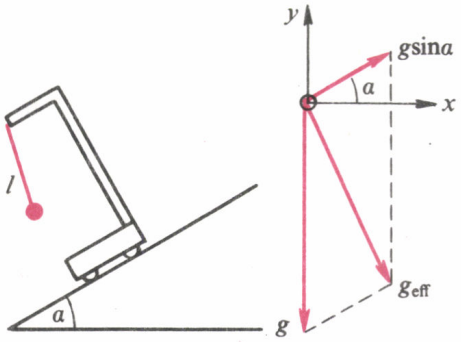
A korábbi, lifttel kapcsolatos példától itt az az eltérés, hogy a gyorsulás a gravitációs gyorsulás irányával bizonyos szöget zár be. Ezért itt egy kiegészítő kérdést is meg kell válaszolnunk, nevezetesen, hogy:

Milyen helyzetben lesz az inga az egyensúlyi állapotban?

Első diák: Én már próbálkoztam hasonló feladat megoldásával, de nem sikerült.

Tanár: Az inga lengési idejét ismét a (75) kifejezés adja meg, de a g helyett – ugyanúgy, mint a liftnél – itt is egy bizonyos g_{eff} effektív gyorsulást kell venni, amelyet a gravitációs gyorsulás és az adott rendszer gyorsulásának vektoriális összegeként kapunk. Ezenkívül arra is figyelemmel kell lennünk, hogy az összeg számításakor a kocsi gyorsulását ellenkező előjellel kell venni, mivel a tehetetlenségi erő a rendszer gyorsulásával ellentétes irányú. A gyorsulási vektorokat az 59. *b)* ábra szemlélteti. Itt már figyelembe vettük, hogy a kocsi gyorsulása $g \sin \alpha$. Fejezzük ki a g_{eff} értékét.

$$g_{\text{eff}} = \sqrt{g_{\text{eff}\,x}^2 + g_{\text{eff}\,y}^2} = \sqrt{(g \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (g - g \sin^2 \alpha)^2} = g \cos \alpha. \tag{79}$$



a) *b)* 59. ábra

Innen a lengési idő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}. \tag{80}$$

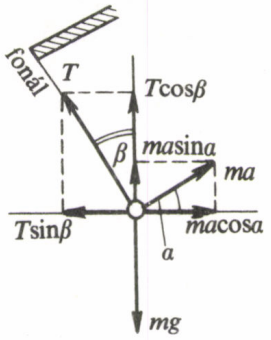
Első diák: És hogyan tudjuk meghatározni az egyensúlyi állapotban a fonál helyzetét?

Tanár: Ebben a helyzetben az a g_{eff} gyorsulás irányával esik egybe. A (79) kifejezésből kiindulva könnyen beláthatjuk, hogy ez az irány

a függőlegessel α szöget zár be. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a lejtőn lefelé guruló kocsin elhelyezett inga az egyensúlyi helyzetben a lejtő síkjára merőleges irányú lesz.

Második diák: Más úton nem juthatunk el ugyanerre az eredményre?

Tanár: Ezt az eredményt közvetlenül is megkaphatjuk, ha a golyónak a kocsihoz viszonyított egyensúlyi helyzetét vizsgáljuk. A rendszerben a kocsi mg súlya, a fonál T húzóereje és az ma tehetetlenségi erő hat (60. ábra). Jelöljük a fonál és a függőleges által bezárt



60. ábra

szöget β-val! Bontsuk fel a fenti erőket függőleges és vízszintes összetevőikre, majd írjuk fel ezen irányokra az összetevők egyensúlyi egyenleteit:

$$\left.\begin{aligned} T\cos\beta + ma\sin\alpha &= mg,\\ T\sin\beta &= ma\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Behelyettesítve a (81) egyenletrendszerbe az $a = g\sin\alpha$ értéket kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} T\cos\beta &= mg(1-\sin^2\alpha),\\ T\sin\beta &= mg\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}\right\}$$

Az egyenleteket elosztva egymással:

$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Tehát $\beta = \alpha$. Ebből következik, hogy az inga egyensúlyi állapotának az a helyzet felel meg, amikor a fonál merőleges a lejtő síkjára.

Második diák: Figyelmesen végighallgatva amit ezen az órán tetszett nekünk magyarázni, arra a következtetésre jutottam, hogy nem is nagyon tévedtem, amikor a 8. órán Tanár Úr azon kérdésére, hogy

milyen erők hatnak a szputnyikra, azt válaszoltam, hogy a Föld vonzóereje és a centrifugális erő. Csupán annyit kell hozzátennem, hogy a válaszom arra az esetre érvényes, amikor a koordináta-rendszerünket a szputnyikhoz rögzítjük, illetve a centrifugális erő alatt a tehetetlenségi erőt kell érteni. Mert hiszen a szputnyikhoz rögzített, neminerciális rendszerben, amikor az erők egyensúlyi állapotára vagyunk kíváncsiak, ezen erők egyike a tehetetlenségi centrifugális erő, nem dinamikus, hanem statikus feladattal állunk szemben.

Tanár: A szputnyikkal kapcsolatos feladat ilyen magyarázata elfogadható. A 8. órában azonban, amikor a centrifugális erőt említette, nem mint tehetetlenségi erőt hozta azt szóba, hanem védekezésként, hogy a szputnyikja le ne essen a Földre! Ezen túlmenően, abban a példában semmi szükség nem volt arra, hogy áttérjünk a szputnyikhoz rögzített koordináta-rendszerben való vizsgálatra, mivel a példa fizikai értelmezése sokkal szemléltetőbb módon megadható volt a centrifugális tehetetlenségi erő bevezetése nélkül. Korábbi tanácsom továbbra is érvényes: hacsak nem feltétlenül szükséges, ne alkalmazzuk a neminerciális koordináta-rendszert.

Feladatok:

59. Hogyan változik meg az inga lengési ideje, ha azt a Földről átvisszük a Holdra? A Hold tömege 81-szer kisebb a Föld tömegénél, a sugara pedig 3,7-szer kisebb a Föld sugaránál.

60. Egy mozgó liftben levő másodpercinga $t = 1$ perc alatt $N = 100$ lengést végez. Mekkora a gyorsulással mozog a lift és milyen irányú ez a gyorsulás?

61. Egy repülőgép kabinjában felfüggesztett $l = 1$ m hosszúságú inga harmonikus lengőmozgást végez. Számítsuk ki a lengés T periódusidejét, ha a repülő vízszintes irányú $a = 5\ \mathrm{m/s^2}$ gyorsulással mozog!

13. MIT TUDNAK A HULLÁMOKRÓL?

Tanár: Ismeretes, hogy a hullámok különböző természetűek lehetnek, mint például a víz felületének hullámzása, a rugalmas hullámok (ezen belül a hanghullámok), az elektromágneses hullámok (amelynek egyik fajtája a fényhullám). Sajnálatos dolog, hogy a felvételizők sokszor csak általánosságban tudnak valamit a hullámokról. Ezért hasznosnak tartanám, hogy megtárgyalnánk néhány, a hullámokkal kapcsolatos fogalmat, például a rugalmas hullámokat választva a vizsgálódás tárgyául.

Ha egy közeg (gáz, folyadék vagy szilárd test) belsejében egy hullámforrást helyezünk el, akkor az rugalmas hullámokat kelt, amelyek a forrástól kiindulva különböző irányban terjednek.

A hullámok transzverzális vagy longitudinális jellegűek lehetnek.

Ki tudná megmondani, hogy mi a különbség a kettő között?

Első diák: Ezt én tudom. **Az olyan hullámot nevezzük transzverzálisnak, amelyikben a hullámot továbbító közeg részecskéi a hullám terjedésének irányára merőlegesen térnek ki (rezegnek), míg a longitudinális hullámok esetében a közvetítő közeg részecskéi a hullám terjedésének irányában rezegnek. A longitudinális hullám tulajdonképpen a közeg ritkulásának és nyomásnövekedésének terjedési folyamatát jelenti.**

Tanár: Milyen hullámokkal találkozunk a gázokban?

Első diák: Longitudinális hullámokkal.

Tanár: Igen. És a szilárd testekben?

Első diák: Transzverzálisokkal.

Tanár: Illetve longitudinálisokkal is. És a folyadékokban?

Első diák: Ebben én nem vagyok biztos. Lehetséges, hogy ugyanaz a helyzet, mint a szilárd testek esetében, tehát egyaránt előfordulhatnak longitudinális és transzverzális hullámok is, vagy talán csak longitudinálisok? Nem tudnám pontosan megmondani.

Második diák: A transzverzális hullámokat a folyadékban igen egyszerűen előállíthatjuk: ha a vízbe egy követ dobunk.

Tanár: Tisztázzuk a helyzetet! Először is: azt leszögeztetjük, hogy a gázokban csak longitudinális rugalmas hullámok terjednek, míg a kondenzált közegekben (azaz a szilárd testekben és a folyadékokban) mind a longitudinális, mind pedig a transzverzális hullámokkal találkozhatunk. Továbbá: ügyeljünk arra, hogy nem szabad összekeverni a folyadék belsejében tovaterjedő hullámokat a folyadék felületén, a folyadékba dobott kő nyomán létrejött hullámokkal. A felszíni és a rugalmas hullámok teljesen eltérő természetűek. Melyek a hullámok jellemző paraméterei?

Első diák: A λ hullámhossz, a T rezgési idő, a ν frekvencia és a v terjedési sebesség. Ezek között a következő összefüggések állnak fenn:

$$\lambda = vT, \text{ és } T = \frac{1}{\nu} \tag{82}$$

Tanár: Valóban. A gyakorlatban azonban a $\omega = 2\pi\nu$ körfrekvenciát elterjedtebben alkalmazzák. A rezgési idő ekkor: $T = 2\pi/\omega$.

Most pedig írjuk fel annak a hullámnak az egyenletét, amelyet a T rezgési idővel rendelkező harmonikus forrás kelt és a hullám terjedési sebessége az x tengely irányában v!

Első diák: Sajnos én ezt nem tudom, mert mi nem is tanultuk.

Tanár: (Második diákhoz): És maga mit tudna mondani a hullám egyenletéről?

Második diák: Azt tudom, hogy **a hullám egyenlete a közeg részecskéinek elmozdulását fejezi ki a koordináta és az idő függvényében,** azonban magát az egyenletet nem tudnám felírni.

Tanár: Hát, nézzük meg együtt! A harmonikus rezgéseket keltő forrást helyezzük el az $x = 0$ pontban! Legyen a t_1 időben az $x = 0$ pontban a részecske kilengése

$$y_1 = A \sin \omega t_1.$$

(A kilengés az y tengely irányában, míg a hullám terjedése az x irányában történik.)

Az $x \neq 0$ pontban mely időpontban lesz a kilengés y_1 nagyságú?

Második diák: Világos, hogy a $t_1 + \frac{x}{v}$ időben, mert a hullám $\frac{x}{v}$ idő alatt jut el az x pontba.

Tanár: Pontosan így van. Most pedig jelöljük az x pontban t időben mért kilengést $y(x, t)$-vel és próbáljuk megmondani, mikor lesz az $x = 0$ pontban a kilengés értéke ugyanekkora?

Második diák: A $t-\frac{x}{v}$ időben.

Tanár: Helyes. Tehát felírhatjuk, hogy

$$y(x, t) = y'\left(t-\frac{x}{v}\right),$$

ahol y'-vel az $x = 0$ pontban mért kilengést jelöltem. A kilengések a harmonikus rezgések ismert törvényszerűségei szerint mennek végbe.

Második diák: Én már értem. A hullám egyenlete a következő alakot ölti:

$$y(x, t) = A \sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]. \tag{83}$$

Tanár: Így van. A (82) kifejezések felhasználásával pedig a (83) egyenletet így is felírhatjuk:

$$y(x, t) = A \sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \tag{84}$$

Megjegyezzük, hogy a $2\pi/\lambda$ hányadost általában k-val jelölik és hullámszámnak nevezik.

Az egyenlet végső alakja a következő:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t-kx); \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{85}$$

Most pedig mondják meg, mit kell a (85) egyenletben megváltoztatnunk, ha a hullám az x tengely mentén nem a pozitív, hanem a negatív irányban terjed?

Második diák: A sebesség előjelét kell megváltoztatnunk. A (83) kifejezést ekkor a következőképpen írhatjuk fel:

$$y(x, t) = A \sin\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)\right], \tag{86}$$

illetve végső alakban:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t+kx). \tag{87}$$

Tanár: A válasz tökéletes. Most tételezzük fel, hogy az x tengely mentén egymással szemben két teljesen azonos hullám terjed! A két hullám összegezésével milyen eredményt kapunk?

Második diák: Majd én elvégzem az összegzést:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega t + kx) = 2A \sin \omega t \cdot \cos kx . \quad (88)$$

Tanár: És mit tudna nekünk mondani a (88) kifejezéssel leírt hullám tulajdonságairól?

Első diák: Ennek az amplitúdója kétszeres, az összes többi jellemzője pedig változatlan.

Tanár: Ez igaz, de nem ez a legfontosabb. Vizsgáljuk csak meg az

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k}, \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{k}, \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{1}{k}, \ldots$$

vagyis az

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \ldots$$

pontokat! Ezeken a helyeken a $\cos kx = 0$. Tehát ezekben a pontokban a hullám kitérése bármely időben nulla értékű lesz.

Második diák: Ez azt jelenti, hogy a (88) hullámban léteznek álló pontok?

Tanár: Pontosan erről van szó. **Ezért a (88) hullámot állóhullámnak, az említett pontokat pedig az állóhullám csomópontjainak nevezik. A (83) – (88) hullámokat viszont haladóhullámoknak nevezik.**

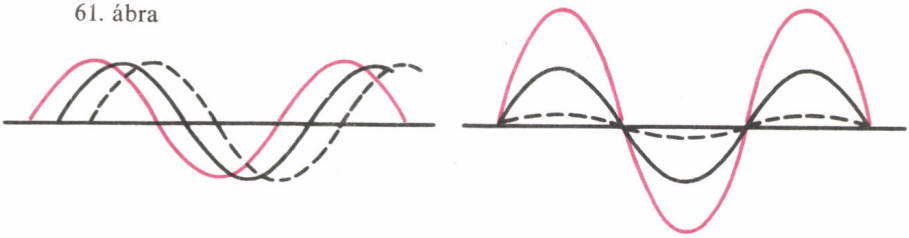
A 61. ábra jól szemlélteti az álló- és haladóhullámok időbeni viselkedésében mutatkozó különbséget.

Beszéljünk most a hanghullámokról! Mivel jellemezhető a hang?

Első diák: A hangot a hangerősséggel, a hangmagassággal és a hangszínnel jellemezhetjük.

Tanár: És milyen kapcsolatban vannak ezek a tulajdonságok a hullám paramétereivel?

61. ábra



A haladó hullám pillanatnyi értékei különböző időben

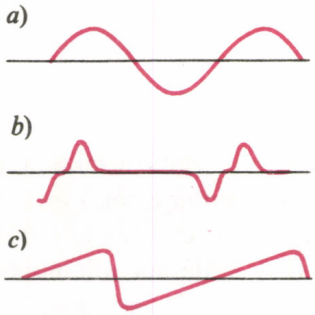
Az állóhullám pillanatnyi értékei különböző időben

Első diák: Azt tudom, hogy a hangerősség egyenesen arányos a hanghullám amplitúdójának négyzetével, a hangmagasság pedig a frekvenciával van kapcsolatban: nagyobb frekvenciához nagyobb hangmagasság tartozik.

Tanár: És mit tud a hangszínről?

Első diák: Erről sajnos, semmit.

Tanár: A hangszín a hanghullám „alakjával" függ össze. Mi eddig csupán a sinusos hullámokról beszéltünk. A sinusos hanghullámokat egyszerű (vagy tiszta) tónusúaknak nevezik. Zenei hatását tekintve, ezeknek a hangoknak nincs megfelelő kifejezőerejük. A 62. ábra



62. ábra

alapján megérthetjük, mit is jelent a hanghullámok „alakja". Az ábra azonos hangerősségű és magasságú, de eltérő színű hanghullámokat mutat be (az ábrán a szemléletesség érdekében transzverzális hullámokkal ábrázoljuk a hanghullámokat): a – egyszerű színű hang (pl. a harang hangja); b – a pianínó hangja; c – a hegedű hangja. A különböző hangszerek egyéni hangja és kifejezőereje az általuk létrehozott hanghullámok sajátos hangszínével kapcsolatos.

Második diák: Én hallottam, hogy az akusztikában bizonyos Doppler-effektus is ismeretes.

Mi ez tulajdonképpen?

Tanár: A Doppler-effektus nemcsak az akusztikában, hanem bármilyen természetű hullámokkal kapcsolatban jelentkezhet. Tegyük fel, hogy a hangforrástól v_0 sebességgel távolodunk és a t_1 időpontban a hanghullám maximális apmlitúdójú rezgése akkor jut el hozzánk, amikor az x_1 pontban vagyunk. A következő maximális rezgés a $t+\tau$ időpontban jut el hozzánk, de akkor mi már az $x_1+\tau v_0$ pontban leszünk. Könnyen beláthatjuk, hogy a τ idő a

rezgés Tperiódusidejéből és abból az időből tevődik össze, amelyre a hullámnak a τv_0 távolság megtételéhez szüksége volt, azaz:

$$\tau = T + \tau \cdot \frac{v_0}{v}, \tag{89}$$

ahol: v – a hangsebesség. Világos, hogy mi a hanghullámokat τ periódusidővel halljuk. A hanghullámok valódi frekvenciája a $\omega = 2\pi/T$, a fülünk által felfogott hangok frekvenciája pedig $\omega' = 2\pi/\tau$. A (89) egyenletet a következő alakra hozhatjuk:

$$\frac{1}{\omega'} = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} \cdot \frac{v_0}{v},$$

illetve

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{v_0}{v}\right). \tag{90}$$

Tehát, **ha a hangforrástól távolodunk, akkor a valódinál alacsonyabb frekvenciával halljuk a hangot és ezt a frekvenciát a (90) kifejezés alapján számíthatjuk. Ha viszont a hangforráshoz közeledünk, akkor fordított a helyzet, a hangot magasabbnak halljuk, mégpedig az**

$$\omega' = \omega\left(1 + \frac{v_0}{v}\right) \tag{91}$$

frekvenciával, lényegében ez a Doppler-effektus.

Itt jegyezzük meg, hogy ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha nem a megfigyelő, hanem a hangforrás közeledik vagy távolodik. A lényeg, hogy a forrás és a megfigyelő egymáshoz képest elmozduljon.

Második diák: És a Doppler-effektus az optikában is létezik?

Tanár: Igen, mint már említettem, a Doppler-effektus bármilyen természetű hullámokra érvényes.

Második diák: Tehát, ha a fényforrás tőlünk távolodik, akkor a fény hullámhosszát hosszabbnak érzékeljük? Ebben az esetben például a sárga színt vörösnek kellene látnunk?

Tanár: Elvben igaza van. Ne feledkezzünk meg azonban arról, hogy a fényhullámok igen nagy, $3 \cdot 10^8$ m/s sebességgel terjednek. Ezért van az, hogy a fényforrás (vagy a megfigyelő) gyakorlatban előforduló sebessége mellett praktikusan szinte lehetetlen a fény frek-

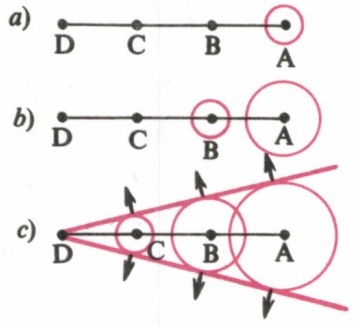
venciaváltozását észlelni. A csillagászok viszont észlelik ezt a frekvenciaeltolódást a csillagok fénysugárzásának tanulmányozása során, mivel itt már kozmikus sebességekről van szó. Így például, ha a csillag sugárzási színképe a vörös fény irányában tolódik el, akkor ebből arra lehet következtetni, hogy az adott csillag tőlünk távolodik.

Most pedig beszélgessünk egy kicsit a hangsebességnél nagyobb sebességek esetén fellépő jelenségekről. Egy egyszerű kérdés: a hangok alapján hogyan különböztethetjük meg egymástól a szuperszonikus és a szokásos repülőgépeket?

Első diák: A szokásos repülők esetében előbb a hangjukat halljuk, majd ezután jelenik meg fölöttünk a gép. A szuperszonikus gépeknél az események sorrendje fordított.

Második diák: Én hallottam már, hogy a szuperszonikus repülőgépeknél úgynevezett lökéshullám keletkezik, amikor nem búgást, hanem robbanást hallunk. Olyannyira robbanást, hogy a házak ablaka is kitörhet tőle.

Tanár: Igen, hangrobbanás megy végbe. Vizsgáljuk meg ennek a keletkezését. Tételezzük fel, hogy a szuperszonikus repülőgép a hangsebesség háromszorosának megfelelő sebességgel repül. Vizsgáljuk meg a helyzetét három egymást követő pillanatban (lásd 63. ábra)!



63. ábra

A t_1 időben a gép az A pontban van. A t_2 időben a gép a B pontban lesz, ugyanakkor az A pontból kiinduló hanghullámok frontja az *a)* ábrán bemutatott gömb mentén található. A t_3 időben a gép a C pontban lesz, az A és B ponttól kiinduló hanghullámok frontjának helyzetét pedig a *b)* ábra szemlélteti. A t_4 időben a gép a D pontba jut, az A, B és C pontból kiinduló hanghullámok frontját viszont a *c)* ábra mutatja. Ha a hanghullámokat összegez-

zük (pl. a t_4 időben), akkor a hullámfrontra egy kúpot kapunk (a 63. ábrán piros vonallal jelölve). A gép mozgása közben ez a front az ábrán nyilakkal jelölt irányban fog a hangsebességgel terjedni. Ez a tulajdonképpeni lökéshullám. Amint ez eljut a megfigyelőhöz, akkor halljuk az erős robbanást. Minél nagyobb a gép sebessége, annál szűkebb lesz a kúp.

Második diák: Most már értem, hogy a szuperszonikus repülőgépek miért nem repülnek a városok fölött.

Tanár: A fenti magyarázat alapján már – úgy gondolom –, nem jelent Önnek különösebb nehézséget a következő feladat.

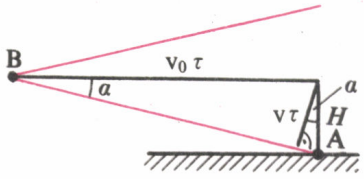
Egy repülőgép v_0 szuperszonikus sebességgel vízszintesen halad. Milyen magasságban repül a gép, ha a megfigyelő csak τ idővel később hallja meg a feje fölött átrepült gép hangját?

Második diák: A feladatot a 64. ábra szerint oldanám meg. A megfigyelő az A pontban áll, és akkor hallja meg a gép hangját, amikor a gép a B pontba ér. Az ábra alapján:

$$H = \frac{v\tau}{\cos\alpha};\quad \frac{v}{v_0} = \sin\alpha.$$

Innen a keresett magasság:

$$H = \frac{v\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}}.$$



64. ábra

Tanár: Nagyon jól oldotta meg a példát.

Második diák: A megoldás során azt feltételeztem, hogy a fény végtelenül rövid idő alatt jut el a megfigyelőhöz. A valóságban azonban a fény is véges sebességgel terjed.

Tanár: Ez igaz. Már említettem, hogy a fény $3 \cdot 10^8$ m/s sebességgel terjed. De mit óhajt ezzel kapcsolatban kérdezni?

Második diák: Azt, hogy az optikában létezik a fénynél nagyobb sebesség?

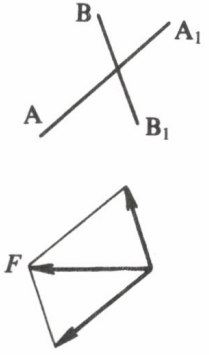
Első diák: De hiszen ez lehetetlen, a természetben a fénynél nagyobb sebesség nem létezik.

Tanár: Ez egy rendkívül érdekes kérdés! Az a helyzet, hogy a fény terjedési sebessége bármely közegben alatta marad a *vákuumban mért* fénysebességnek. Ezért előfordulhat olyan eset, hogy egy részecske (például az elektron) egy adott közegben gyorsabban mozog, mint az adott *közegre vonatkozó* fénysebesség. Érdekes jelenséggel állunk szemben: a repülő elektron egy fénygúlát hoz létre, amelyet nevezhetnénk „fénylökéshullámnak". A jelenség a fizikában Cserenkov-effektus néven ismeretes.

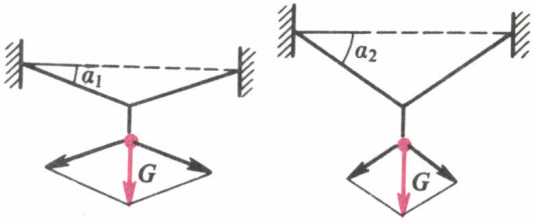
14. JÁRATOSAK-E AZ ERŐK FELBONTÁSÁBAN?

Tanár: A mechanikai feladatok megoldásakor igen gyakran szükséges az erők felbontását alkalmazni. Ezért nem tartom feleslegesnek egy kissé részletesebben megtárgyalni ezt a kérdést. Mindenekelőtt feleleveníteném a legfontosabb alapszabályt: **valamely erő felbontását azzal kell kezdeni, hogy az erő támadási pontján és végpontján keresztül egy-egy pár, a felbontási iránnyal párhúzamos egyenest húzunk. Ezzel egy paralelogrammához jutunk, amelynek az oldalai adják majd az adott erő tulajdonképpeni keresett összetevőit.** Ezt a szabályt szemlélteti a 65. ábra, ahol az F erőt az AA_1 és a BB_1 irányú összetevőire kell felbontani. Lássunk néhány konkrét példát az erő felbontásával kapcsolatban!

Első példa (66. ábra)



65. ábra



66. ábra

Két kifeszített kötélre középen azonos G súlyú tárgyat függesztünk fel. A súly alatt a kötelek közepén lelógnak, és a vízszintessel α_1, illetve α_2 szöget zárnak be. Melyik kötélre hat nagyobb feszítőerő?

Első diák: Ugyanezen az ábrán elvégzem a tárgy súlyának felbontását a kötelek irányával párhuzamos összetevőkre. Az erők összetevői

alapján a kötélre ható feszítőerő értéke: $T = G/(2 \sin \alpha)$. Ebből következik, hogy arra a kötélre hat nagyobb feszítőerő, amely kevésbé lóg le.

Tanár: Pontosan így van. És vajon ki tudjuk-e annyira feszíteni a kötelet, hogy az a test súlya alatt egyáltalán ne lógjon lefelé középen?

Első diák: Miért ne?

Tanár: Ne hamarkodjuk el a választ! Vessen egy pillantást arra az eredményre, amit az imént éppen felírt!

Első diák: Valóban, már értem is. Nem tudjuk annyira kifeszíteni a kötelet, hogy az egyáltalán ne lógjon középen lefelé, hiszen az α szög csökkenésével együtt nő a kötélre ható feszítőerő. Elegendően kis α szög esetén pedig a kötélre ható feszítőerőre olyan nagy értéket kapunk, hogy nincs az a kötél, amelyik ezt kibírná.

Tanár: Meg kell itt említeni, hogy a kötél belógása a ráakasztott test súlya alatt azért lehetséges, mert a kötél rugalmas, nyújtható. Ha a kötél anyaga nem lenne képes deformálódni (megnyúlni), akkor nem lehetne rá semmiféle súlyt akasztani ebben a helyzetben. Ebből igen jól látszik, hogy az építészetben a különféle szerkezeti anyagok rugalmassági tulajdonsága szorosan kapcsolódik az egyes szerkezeti elemek rugalmas alakváltoztatási képességéhez (ahogyan mondani szokták: „a szerkezeti elemeknek mozgási lehetőségre van szükségük"). A túlzottan szilárd konstrukciók a gyakorlatban nem valósíthatók meg, mivel ha azokban feszültségek jönnek létre, ezek már kis deformációnál is rendkívül nagy értéket vehetnek fel. Az ilyen konstrukció már a saját súlya alatt is összerogyhat.

Ha a fenti feladatban a kötél súlyát elhanyagoljuk, akkor könnyen megkaphatjuk az α belógási szög és a teher G súlya közötti összefüggést. Ehhez a kötél rugalmas alakváltozására alkalmazni kell Hooke törvényét (lásd 65. feladat).

Nézzük a második példát: a „kutyaharapást szőrével" közmondás az orosz ember szájából így hangzik: „az éket ékkel üsd ki!". Győződjünk meg arról, hogy a közmondásnak van fizikai alapja!

A 67. *a)* **ábrán az 1. éket úgy próbáljuk „kiütni" a hasadásból, hogy mellé F erővel a 2. éket verjük be. Ismeretes α és β értéke. Számítsuk ki az 1. ékre ható erőt, amely kifelé üti az éket a hasadékból!**

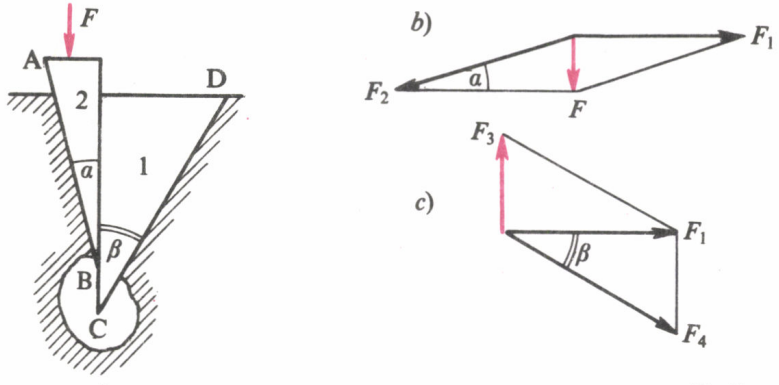
Első diák: Én azt hiszem, nem tudnám megoldani ezt a feladatot.

Tanár: Bontsuk fel az F erőt egy vízszintes és egy, a 2. ék AB oldallapjára merőleges összetevőire! Az így kapott összetevőket jelöljük F_1 és F_2-vel (67. *b)* ábra)! Az F_2 összetevőt a hasadék bal oldali falának reakcióereje egyenlíti ki, míg az $F_1 = F/\operatorname{tg}\alpha$ az 1. ékre fog hatni. Bontsuk fel ezt az erőt egy függőleges és egy, az 1. ék DC oldalára merőleges összetevőre, ekkor az F_3 és F_4 erőket kapjuk (67. *c)* ábra). Az F_4 erőt a hasadék jobb oldali falának reakcióereje egyenlíti ki, míg az F_3 erő az 1. éknek a hasadékból való „kiütését" biztosítja. Ez tulajdonképpen a keresett erő. Könnyen beláthatjuk, hogy ennek az értéke:

$$F_1 \operatorname{tg}\beta = F\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

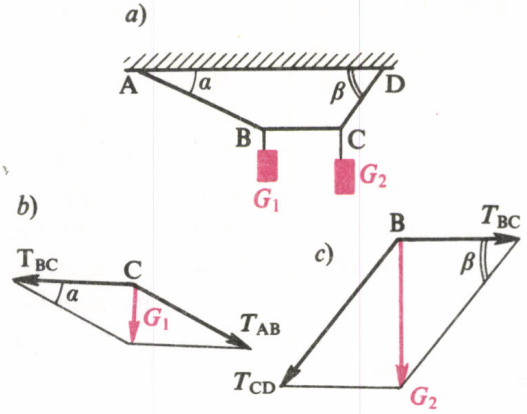
Nézzük meg harmadik példánkat, amelyet a 68. *a)* ábra szemléltet! **Egy kötélre egy G_1 és egy G_2 súlyt függesztettünk fel, úgy, hogy a kötél középső szakasza vízszintesen helyezkedik el. Számítsuk ki β értékét, ha α ismert, illetve az egyes kötélszakaszokra ható feszítő erőket (T_{AB}, T_{BC} és T_{CD})!**

Ez a példa hasonlít az előzőhöz, ahol az ékekre ható erőket vizsgáltuk.



67. ábra

Első diák: A G_1 súlyt az AB és BC irányokkal párhuzamos összetevőire bontanám (68. *b)* ábra). A felbontás alapján közvetlenül megkapjuk a két keresett erő értékét: $T_{AB} = G_1/\sin\alpha$ és $T_{BC} = G_1/\operatorname{tg}\alpha$. Továbbá a G_2 súlyt a BC és CD irányokkal párhuzamos összetevőire bontom (68. *c)* ábra). Innen azt kapom, hogy



68. ábra

$T_{BC} = G_2/\operatorname{tg}\beta$ és $T_{CD} = G_2/\sin\beta$. Ha a BC szakaszra ható kétféleképpen számított feszítőerő értékét egyenlővé teszem, akkor a

$$\frac{G_1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{G_2}{\operatorname{tg}\beta}$$

egyenletből:

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{G_2}{G_1}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Ezt behelyettesítve a T_{CD} kifejezésbe, megkapjuk ennek a feszítőerőnek az értékét is.

Tanár: Talán valami problémát jelent a végső eredmény kiszámítása?

Első diák: Ez a kifejezés implicit alakot ölt:

$$T_{CD} = \frac{G_2}{\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{G_2}{G_1\operatorname{tg}\alpha}\right)}.$$

Tanár: Az eredmény helyes, azonban egyszerűbb alakra hozható, ha a sin β-t a tg β segítségével fejezzük ki:

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}.$$

Mivel azonban $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{G_2}{G_1}\operatorname{tg}\alpha$

$$T_{CD} = \frac{G_1}{\operatorname{tg}\alpha}\sqrt{1+\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Második diák: Egyre inkább meggyőződöm arról, hogy a fizika felvételi vizsga előtt alaposan át kell ismételni a matematikát.

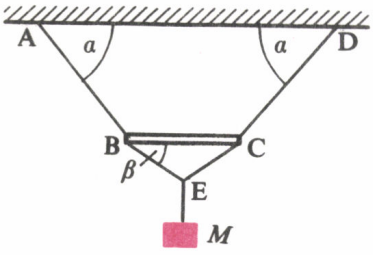
Tanár: Látja, ez a megjegyzés másoknak is hasznára lehet.

Feladatok:

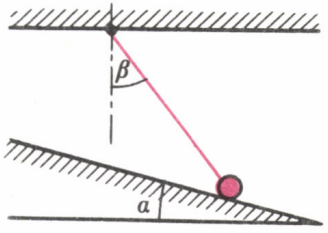
62. Egy hasadékban két ék található (67. ábra). Ha a 2. ékre egy bizonyos erővel hatunk, az 1. ék fölfelé kezd mozogni. Az ékek és a hasadék felülete között fellépő súrlódás együtthatójának milyen μ értéke esetén lehetséges ez, ha az ékek tömege és a közöttük fellépő súrlódás elhanyagolható?

63. Egy $m = 6$ kg tömegű, homogén rúd a 69. ábrán bemutatott módon van felfüggesztve. Az M súly tömege 10 kg. Számítsuk ki a kötelekben fellépő T feszítőerőt és a rúd F reakcióerejét!

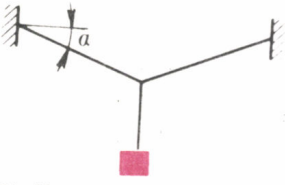
64. Számítsuk ki a 70. ábrán levő kötél T feszítőerejét és az m tömegű golyó által a lejtő síkjára gyakorolt N nyomóerőt, ha a lejtő meredeksége α, a kötél a függőlegessel β szöget zár be, és a golyó és a lejtő között nincs súrlódás.



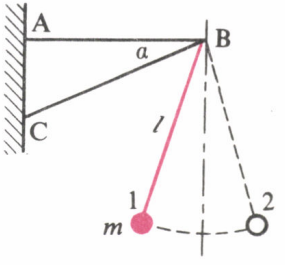
69. ábra



70. ábra



71. ábra



72. ábra

65. Egy liftben vízszintesen kifeszítettünk egy kötelet, majd középen egy súlyt akasztottunk rá a 71. ábrán bemutatott módon. A nyugalmi helyzetben levő liftben a kötél 30°-os szögben, míg a gyorsuló liftben 45°-os szögben lóg le. Számítsuk ki a lift gyorsulásának nagyságát és irányát. A kötél súlyát elhanyagolhatjuk.

66. Az $m = 100$ g tömegű golyót $l = 1$ m hosszúságú fonállal egy tartópillérre függesztjük a 72. ábrán bemutatott módon ($\alpha = 30°$). A golyót vízszintes irányú, 2 m/s sebességgel meglökjük, ennek következtében az lengő mozgásba jön. Számítsuk ki az AB és BC rudakra ható erőket, ha az inga egyensúlyi helyzetétől maximálisan tér ki!

15. MIT TUDNAK A TESTEK EGYENSÚLYI HELYZETÉRŐL?

Tanár: A 73. ábra egy tégla két eltérő egyensúlyi helyzetét ábrázolja. Mindkét bemutatott egyensúlyi helyzet stabilis állapotnak felel meg, azonban a stabilitási fokuk eltérő. A két helyzet közül melyik a stabilisabb?

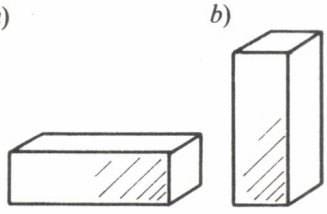
Első diák: Világos, hogy a 73. *a)* ábrán bemutatott helyzet stabilisabb.

Tanár: És miért?

Első diák: Azért, mert ebben a helyzetben a tégla súlypontja a Földhöz közelebb helyezkedik el.

Tanár: Igen, de nemcsak ez az oka.

Második diák: Ebben a helyzetben a tégla alátámasztási felülete nagyobb, mint a 73. *b)* ábrán bemutatott helyzetben.



73. ábra

Tanár: Ez is igaz, de még mindig nem teljes a magyarázat. A kérdés lényegének megértése céljából vizsgáljuk meg egy négyzet alapú hasáb és egy hengeres test egyensúlyi feltételét (74. *a)* ábra)! Legyen a hasáb és a henger közös magassága H, az alaplap területe pedig S. Ebben az esetben mindkét test súlypontja azonos magasságban helyezkedik el, valamint az alátámasztási felületek is megegyező nagyságúak. Ennek ellenére a két test stabilitási foka eltérő lesz. **Egy konkrét egyensúlyi helyzet stabilitási fokának mértékéül az az energia szolgál, amelyet a testtel közölnünk kell ahhoz, hogy azt az adott helyzetéből végérvényesen kitérítsük.**

Második diák: Mit kell itt a „végérvényesen" kifejezés alatt érteni?

Tanár: Azt, hogy a magára hagyott test már nem képes visszatérni eredeti helyzetébe. Az említett energia értékét pedig úgy kapjuk meg, hogy a test súlyát szorozzuk azzal a magassággal, amellyel a test súlypontját meg kell emelnünk, hogy eredeti helyzetébe ne tudjon visszatérni. A feladatunkban szereplő két test közül a henger sugara $R = \sqrt{S/\pi}$, míg a hasáb oldalának hossza $a = \sqrt{S}$. A hengert oly módon tudjuk egyensúlyi helyzetéből kimozdítani, ha a súlypontját a

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + R^2} - \frac{H}{2}$$

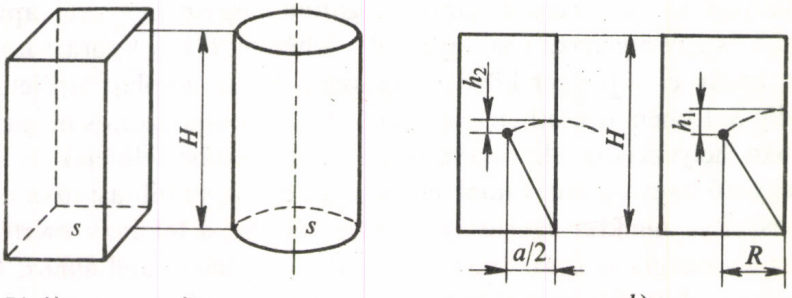
magassággal megemelve kibillentjük az oldalra, míg a hasábnál ezt a magasság

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{H}{2}$$

(74. *b)* ábra). Mivel

$$\frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 1,$$

$h_2 < h_1$.



74. ábra *a)* *b)*

Ebből következik, hogy a két test közül a henger stabilisabb.

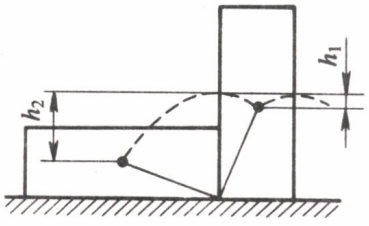
E rövid kitérő után pedig térjünk vissza az eredeti példánkhoz és vizsgáljuk meg a tégla két különböző helyzetét!

Első diák: Ha a téglát görgetni kezdjük, akkor az egyik egyensúlyi helyzetből a másikba fog váltakozva átmenni. A 75. ábra ezt szemlélteti, ahol a tégla súlypontja által leírt pályát a szaggatott vonal jelöli. Ha a téglát álló helyzetéből kívánjuk kimozdítani, akkor a súlypontját csak h_1 magassággal kell megemelnünk, azaz mgh_1 energiát kell befektetnünk, míg ha fekvő helyzetből kívánjuk ugyanezt végrehajtani, ahhoz a súlypontot h_2 magassággal kell megemelni, azaz mgh_2 energiát kell befektetni. A fekvő helyzet nagyobb stabilitási fokát az okozza, hogy

$$mgh_1 < mgh_2. \tag{92}$$

Tanár: Most már a felelete teljesen szabatosan indokolja meg, hogy miért nagyobb a test stabilitási foka fekvő helyzetben.

Második diák: Ha jól megnézzük, akkor látható, hogy h_1 és h_2 értékét a súlypontoknak az alátámasztási felülettől mért távolsága és az alátámasztási felület nagysága szabja meg. Ezek szerint tehát jogosnak tekinthető a testek stabilitási fokát a súlypontjuk elhelyezkedési magassága és az alátámasztási felületeik nagysága egybevetésével értékelni?



75. ábra

+**Tanár:** Igen, az értékelésnek ez a módja jogos, de csak olyan mértékben, amilyen mértékben ezek a paraméterek kihatással vannak a h_1 és h_2 magasságok különbségére. Láttuk ugyanis, hogy a hasáb és a henger esetében a súlypontok magassága és az alátámasztási felületek összehasonlítása alapján nem lehetett eldönteni, hogy melyik test helyzete stabilisabb. Ezen túlmenően még egy tényezőre szeretném felhívni a figyelmüket, nevezetesen, hogy eddig hallgatólagosan elfogadtuk, hogy az összehasonlítás tárgyát képező testek azonos anyagból készültek. Ezért a (92) egyenlőtlenség teljesülésé-

nek egyetlen feltétele volt, nevezetesen a $h_1 < h_2$ geometriai viszony fennállása. Általános esetben azonban a testek különböző anyagból is készülhetnek és ekkor a (92) egyenlőtlenség – a testek sűrűségének elengendően nagy eltérése következtében – még a $h_1 > h_2$ feltétel mellett is teljesülhet. Így például egy parafából készült tégla még fekvő helyzetben is kevésbé lesz stabil, mint egy ólomtégla álló helyzetben. Most pedig ismételjük át a testek egyensúlyi feltételeit! Ezek közül hányat tudnának emlékezetből felsorolni?

Első diák: A testre ható összes erő eredőjének nullának kell lennie, ezen kívül a test súlyát ábrázoló erővektornak a test alátámasztási felületén belül kell átmennie.

Tanár: Rendben van. Célszerűbb azonban az egyensúlyi feltételeket ennél általánosabban és a gyakorlati alkalmazás szempontjából előnyösebb fogalmazásban megadni. A testek egyensúlyának két feltétele van.

Az első feltétel: **A testre ható összes erő tetszőleges irányú vetülete kölcsönösen kiegyenlíti egymást. Más szavakkal: a hatóerők bármely irányú vetülete algebrai összegének nullával kell egyenlőnek lennie.** Ez a feltétel biztosítja, hogy annyi egyenletet tudunk felírni, ahány egymástól független irány szerepel egy adott feladatban, azaz egydimenziós feladatra egy, kétdimenziós feladatra kettő, általános esetben pedig (azzal, hogy a derékszögű térbeli koordináta irányokra vetítünk) három egyenletet kapunk.

A második feltétel: (a forgatónyomatékokra vonatkozó feltétel), hogy **a testre ható erők bármely forgatási pontra vonatkoztatott forgatónyomatékainak összege nulla kell legyen. A számításnál azon erők nyomatékait, amelyek azonos irányban (pl. az óramutató járásával ellentétesen) kényszerítik a testet a kiválasztott forgási pont körül elfordulni, pozitív, azokat pedig, amelyek ellenkező irányban (az óramutató járásával megegyezően) hatnak, negatív előjellel vesszük figyelembe.** A forgatónyomatékok algebrai összegzését a következő lépésekben hatjuk végre: *a)* feltüntetjük a testre ható összes erőt; *b)* kiválasztjuk azt a pontot, amely körül a test elfordulását vizsgáljuk; *c)* kiszámítjuk minden erő forgatónyomatékát a fenti pontra vonatkoztatva; *d)* a forgatónyomatékokat összeadjuk és nullával tesszük egyenlővé. Ennek a feltételnek a gyakorlati alkalmazása során két tényezőt kell szem előtt tartani: 1. a fenti megfogalmazás arra az esetre érvényes, amikor minden erő támadási pontja és iránya egyazon síkban fekszik (tehát, ha a feladat

nem háromdimenziós); 2. az erők forgatónyomatékainak összege nulla kell legyen, bármely, tetszőlegesen kiválasztott pontra vonatkoztatva, akár a vizsgált testen belül, akár azon kívül helyezkedik el ez a pont. Hangsúlyozni kell, hogy az egyes erők forgatónyomatékának értéke a kiválasztott forgási pont elhelyezkedésétől függ, azonban a nyomatékok algebrai összege mindig nulla marad. Az egyensúlyi feltételek jobb megértése érdekében lássunk erre egy példát!

A G_1 súlyú rúd a B és C pontokban van rögzítve (76. *a)* ábra). A rúdra a D pontban egy G_2 súlyt függesztünk. Adott az AB = a, BC = $2a$, CD = a távolságok értéke. Számítsuk ki az N_B és N_C reakcióerőket! Ezeket vegyük függőleges irányúaknak!

Kezdjük ezt a feladatot is a testre ható erők feltüntetésével!

Első diák: A vizsgált test jelen esetben a rúd, amelyre a G_1 és G_2 súlyerő és az N_B és N_C reakcióerő hat.

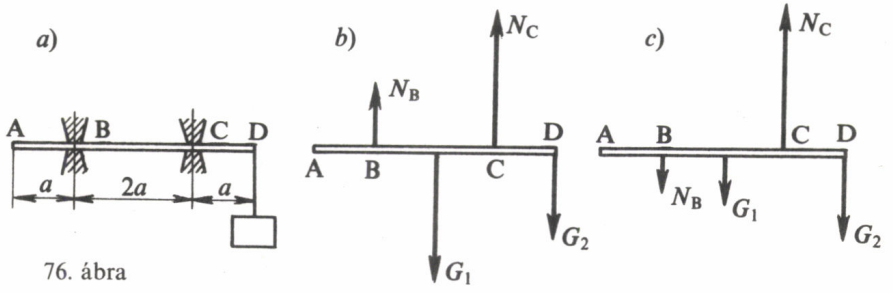
Tanár: Rajzoljuk fel ezeket az erőket!

Első diák: Csakhogy egyelőre nem tudjuk, fölfelé vagy lefelé irányúlnak-e a reakcióerők.

Tanár: Tételezzük fel, hogy mindkét reakcióerő fölfelé mutat!

Első diák: Akkor az erőket a 76. *b)* ábrán bemutatott módon rajzolom fel és az egyensúly első feltétele alapján felírom a következő egyenletet:

$$N_B + N_C = G_1 + G_2.$$



76. ábra

Tanár: Semmi kifogásom ellene, azonban egyszerűbben jutunk a megoldáshoz, ha erre a példára az egyensúly második feltételét alkalmazzuk és a forgatónyomatékokat írjuk fel a B és a C pontra vonatkoztatva.

Első diák: Igen értem. Ekkor a következő egyenleteket írhatjuk fel a B pontra vonatkozóan:

$$G_1 a - N_B 2a + G_2 3a = 0,$$

a C pontra vonatkozóan pedig: (93)

$$N_B 2a - G_1 a + G_2 a = 0.$$

Tanár: Látják? Mindkét egyenlet csupán egy ismeretlent tartalmaz és ezek közvetlenül kifejezhetők.

Első diák: A (93) egyenleteket rendezve, megkapjuk a reakcióerőket:

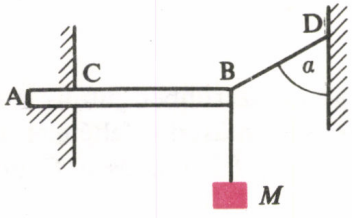
$$N_B = \frac{1}{2}(G_1 - G_2), \tag{94}$$

$$N_C = \frac{1}{2}(G_1 + 3G_2). \tag{95}$$

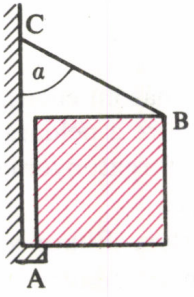
Tanár: A (95) kifejezés értéke minden esetben pozitív előjelű, tehát az N_C reakcióerő mindig fölfelé mutat, ahogyan azt előre is feltételeztük. A (94) kifejezés pozitív értékű, ha $G_1 > G_2$, negatív, ha $G_1 < G_2$ és nulla lesz, ha $G_1 = G_2$. Ez pedig azt jelenti, hogy $G_1 > G_2$ esetén az N_B erő a feltételezésünknek megfelelő irányú lesz, azaz fölfelé mutat (lásd 76. *b)* ábra), ha $G_1 < G_2$, az N_B lefelé mutat, (lásd 76. *c)* ábra), ha pedig $G_1 = G_2$, akkor az N_B reakcióerő nem létezik.

Feladatok:

67. Az AB rúd, amelynek a tömege $m = 5$ kg, a 77. ábrán jelölt módon van rögzítve. A rúd B pontján egy $M = 15$ kg tömegű súly függ. Határozzuk meg az A és C pontban fellépő reakcióerőket és a BD kötélre ható feszítő erőt, ha $AC = a = 0{,}25$ m, $AB = b = 1$ m és $\alpha = 60°$.



77. ábra



78. ábra

68. Egy homogén anyagból készült kocka A sarkával a fal kiugró peremére támaszkodik, B pontja pedig egy kötélhez van rögzítve (78. ábra). Számítsuk ki a BC kötélre ható feszítőerőt, az A pontban fellépő reakcióerőt és ez utóbbi irányát, ha a kocka tömege m, a kötél és a függőleges által bezárt szög pedig α.

69. Az asztal vízszintes lapján egy láncdarab fekszik. A láncnak maximálisan mekkora l_1 hosszúságú darabja lóghat le az asztalról, ha a lánc és az asztal között a súrlódási együttható μ?

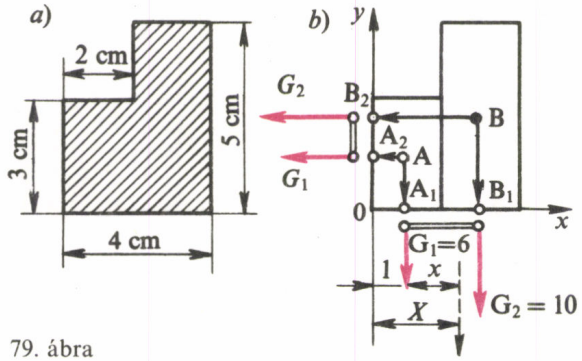
70. Mekkora W munkát kell kifejtenünk ahhoz, hogy egy M tömegű kockát az élén át egy másik lapjára fordítsunk, ha a kocka anyagának sűrűsége ϱ?

16. HOGYAN SZÁMÍTJUK KI EGY TEST SÚLYPONTJÁNAK HELYÉT?

Tanár: A vizsgázók elég gyakran követnek el hibát a testek vagy testcsoportok súlypontjának meghatározását tartalmazó feladatok megoldása során. Önök előtt ez a feladat teljesen világos, vagy van esetleg kérdésük ezzel kapcsolatban?

Első diák: Nekem lenne kérdésem. Számomra nem egészen világos, hogyan keressük meg a súlypont helyét pl. a 79. *a)* és 80. *a)* ábrákon jelölt esetekben.

Tanár: Nézzük meg együtt ezeket a példákat! Az első esetben célszerű a lemezt két téglalapra felbontani (79. *b)* ábra). Az első téglalap súlypontja az A pontban helyezkedik el, a súlya pedig arányos a területével és egyenlő 6 súlyegységgel (a súlyt most az egyszerűség kedvéért feltételesen cm^2 egységben számoljuk). A második téglalap súlypontja a B pont, súlya pedig 10 súlyegység. Képezzük az A és B pontok vetületeit az x és y koordinátatengelyeken, és jelöljük ezeket az x tengelyen A_1, B_1-gyel, az y tengelyen pedig A_2, B_2-vel! A továbbiakban az A_1B_1 és A_2B_2 „rudat" vizsgáljuk azzal a feltételezéssel, hogy a rudak tömege azok végpontjában összpontosul és minden egyes végpont tömege megegyezik

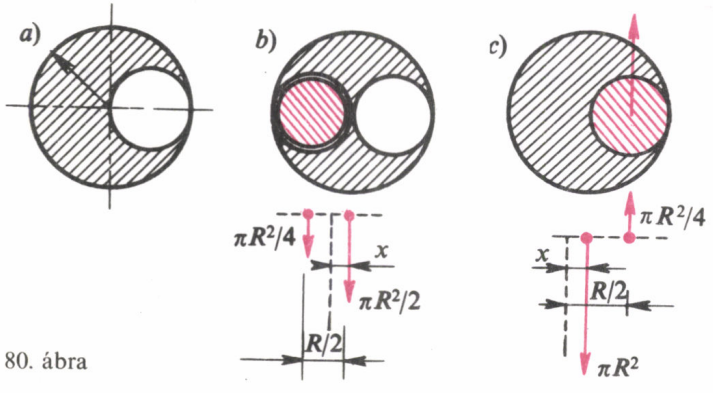


79. ábra

az adott téglalap tömegével (lásd 79. *b)* ábra). Ily módon a lemez súlypontját az A_1B_1 és A_2B_2 „rudak" súlypontjai alapján kapjuk meg, amelyeknek a koordinátatengelyen elfoglalt helyzete egyben a keresett súlypont koordinátaértékeit szolgáltatja. Oldjuk meg a feladatot számszerűen is. Előbb a forgatónyomatékok semlegesítési feltétele (egy egyensúly második feltétele) alapján meghatározzuk az A_1B_1 „rúd" súlypontjának a helyét. A $6x = 10(2-x)$ egyenletből: $x = 5/4$ cm. Tehát a lemez keresett súlyponti helyének X koordinátaértéke az adott léptékegységben kifejezve: $X = (1+x)\,\text{cm} = 9/4$ cm. Hasonló módon kapjuk meg az A_1B_1 „rúd" súlypontjának helyét a $6y = 10(1-y)$ egyenletből: $y = 5/8$ cm. A lemez súlypontjának Y koordinátaértéke: $Y = (1{,}5+y) = 17/8$ cm.

Első diák: Igen, értem és a lemez súlypontjának X koordinátáját én is ugyanígy számítottam volna ki. Arról azonban egyáltalán nem voltam meggyőződve, hogy az Y koordinátát is ugyanilyen módon számolhatjuk.

Tanár: Nézzük meg a másik példát, amelyet a 80. *a)* ábra szemléltet. Ezt a példát kétféleképpen is megoldhatjuk. Az egyik eljárásnál az eredeti alakzatot helyettesítjük egy olyan R sugarú lemezzel, amelyből nem egy, hanem két kis kört vágunk ki szimmetrikusan, és az egyiket közölük visszahelyezzük (80. *b)* ábra). Az így előállt mindkét alakzat súlypontja a saját geometriai középpontjában helyezkedik el. Egyenletes lemezvastagságnál a két darab $R/2$ sugarú körrel kisebbített, R sugarú körlemez súlya a $(\pi R^2 - 2\pi R^2/4) = \pi R^2/2$ területtel, a kis kör súlya pedig a $\pi R^2/4$ területtel arányos. Ezek után a megoldás arra az egyszerű esetre vezethető



80. ábra

vissza, amikor két erő eredőjének a támadáspontját keressük (lásd: 80. *b)* ábra). Jelöljük a keresett súlypont és a nagy kör geometriai középpontja közötti távolságot x-szel. A 80. *b)* ábra alapján a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\frac{\pi R^2}{4}\left(\frac{R}{2}-x\right)=\frac{\pi R^2}{2}\cdot x,$$

és ebből a megoldás: $x = R/6$.

A példa megoldható oly módon is, hogy az adott alakzatot egy tömör (kivágás nélküli) körrel és egy, a kivágás helyére helyezett $R/2$ sugarú, de negatív súlyú körrel helyettesítjük (80. *c)* ábra), azaz a kis kör súlyereje fölfelé mutat és kompenzálja a tömör körnek a kivágás helyén levő részét, tehát végeredményben ez a rendszer megfelel az eredeti alakzatnak. Itt is két erő eredőjének a támadáspontját kell megtalálnunk, amint a 80. *c)* ábra alján láthatunk. Az ábra alapján felírhatjuk, hogy

$$\pi R^2 x = (\pi R^2/4)\cdot(R/2+x)$$

és innen ismét az $x = R/6$ eredményt kapjuk.

Első diák: Nekem az első megoldás jobban tetszik, mert ott nem kell a negatív súlyhoz folyamodnunk.

Tanár: Még egy példát szeretnék megoldani.

Szerkesszük meg a 81. *a)* **ábrán bemutatott rendszer súlypontját, ha ismeretes, hogy a G_1 G_2, ... G_6 különböző értékű súlyok a rúd mentén egymástól azonos távolságban helyezkednek el! A rúd súlyát elhanyagolhatjuk.**

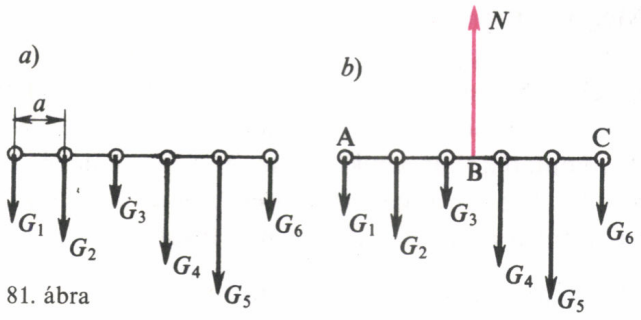
Nos, hogyan oldanák meg ezt a példát?

Első diák: Én azzal kezdeném, hogy előbb csak két erőt – pl. a G_1 és G_2-t – vizsgálnám, megszerkeszteném ezek eredőjének a támadáspontját, berajzolnám ezt az eredő erőt (amely egyenlő G_1 és G_2 összegével), és a megoldás további részében teljesen figyelmen kívül hagynám a G_1 és G_2 erőt. Most a hat erő helyett már csak öttel van dolgom. A továbbiakban megszerkeszteném másik két erő eredőjét és így tovább. Egymás után többször ismételve ezt az eljárást, végül is megkapnám a keresett, egyetlen eredőt, amelynek a támadáspontja egyben az adott rendszer súlypontját is szolgáltatja.

Tanár: A megoldás helyes, de igen hosszadalmas. Létezik azonban ennél elegánsabb megoldás is. Tételezzük fel, hogy a rudat középen (a 81. *b)* ábrán a B pontban) alátámasztottuk.

Második diák: (közbevág) De hiszen egyelőre nem ismerjük a súlypont helyét. Honnan tetszik tudni, hogy az a G_3 és G_4 erők támadási pontja közé fog esni?

Tanár: Számomra egyelőre teljesen közömbös, hol van a súlypont. Azt sem fogom felhasználni, hogy a 81. *b)* ábrán a súlypont a G_3 és G_4



81. ábra

erők támadási pontja közé esett. Tételezzük fel tehát, hogy a rudat a súlypontjában alátámasztottuk. Ennek következtében a rendszerünk egyensúlyi helyzetbe került. Ekkor azonban a hat erőn kívül még az alátámasztási felület reakcióereje is hat a rúdra. Mivel azonban a rúd egyensúlyban van, felhasználhatjuk az egyensúlyi helyzetre vonatkozó és a 15. órán ismertetett feltételeket. Előbb a hatóerők függőleges irányú összetevőit összegezzük:

$$N = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6, \tag{96}$$

majd pedig a forgatónyomatékokat vizsgáljuk meg az A forgási pontra, azaz a rúd bal oldali végpontjára (81. *b)* ábra) vonatkoztatva. Ebben az esetben a hatóerők az óramutató járásával megegyező irányban igyekeznek a rudat elfordítani, míg a reakció – az óramutató járásával ellentétesen. Felírhatjuk tehát a nyomatékok egyenlőségét:

$$N \cdot (\mathrm{AB}) = G_2 a + G_3 2a + G_4 3a + G_5 4a + G_6 5a. \tag{97}$$

Az egyensúlyi feltételeket leíró (96) és (97) egyenletek összevonásával kapjuk az AB szakaszt, azaz a keresett súlypont helyzetét a rúd bal oldali végpontjától mérve:

$$\mathrm{AB} = \frac{G_2 a + G_3 2a + G_4 3a + G_5 4a + G_6 5a}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6}. \tag{98}$$

Első diák: Igen, az Ön megoldása lényegesen egyszerűbb.

Tanár: Felhívnám a figyelmét arra, hogy annak a megoldásnak a terjedelme, amelyet javasolt, igen erősen függ a rúdra felfüggesztett súlyok számától (minden újabb súly erősen megnehezíti a megoldást), míg az én módszeremnél a súlyok számának egyáltalán nincs jelentősége. Mindössze annyi történhet, hogy a (98) kifejezésben a számlálóban és a nevezőben is eggyel megnő az összeadandók száma.

Második diák: Meg lehetne-e határozni a súlypont helyzetét csakis a forgatónyomatékok alapján?

Tanár: Igen, meg lehet. Mindössze az kell hozzá, hogy a nyomatékok egyenlőségét két különböző pontra vonatkozóan írjuk fel. Próbáljuk meg! A nyomatékokat írjuk fel az A és C pontokra (lásd 81. *b)* ábra)! Az A pontra vonatkozó egyenletet a (97) kifejezés adja, míg a C pontra a következő egyenlet írható fel:

$$N \cdot (5a - \mathrm{AB}) = G_5 a + G_4 2a + G_3 3a + G_2 4a + G_1 5a. \qquad (99)$$

Osszuk el a (97)-et a (99)-el:

$$\frac{\mathrm{AB}}{5a - \mathrm{AB}} = \frac{G_2 a + G_3 2a + G_4 3a + G_5 4a + G_6 5a}{G_5 a + G_4 2a + G_3 3a + G_2 4a + G_1 5a}.$$

Innen:

$$\mathrm{AB}\,(G_5 a + G_4 2a + G_3 3a + G_2 4a + G_1 5a + G_2 a + G_3 2a + G_4 3a + G_5 4a + G_6 5a) = 5a(G_2 a + G_3 2a + G_4 3a + G_5 4a + G_6 5a),$$

illetve:

$$\mathrm{AB} \cdot 5a(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + + G_6) = (G_2 a + G_3 2a + G_4 3a + G_5 4a + G_6 5a)5a.$$

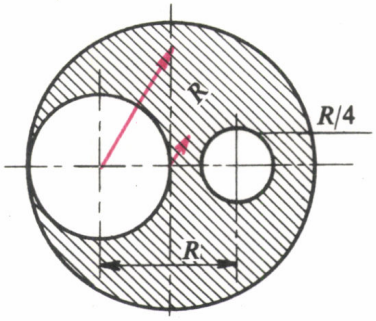
Tehát ismét a (98) kifejezést kapjuk megoldásul.

Feladatok:

71. Határozzuk meg a 82. ábrán bemutatott lemez súlypontját! A kivágott körök sugara az R fele, illetve negyede.

72. Határozzuk meg egy a oldalú, egyenlő oldalú háromszög súlypontját, ha az oldalak azonos anyagból készültek, a csúcspontokban pedig rendre m, $2m$ és m súlyokat rögzítettünk! Két esetet

vizsgáljunk meg: 1. a háromszög oldalainak tömegét elhanyagoljuk;
2. ezek tömege $M = 4\ m$.



82. ábra

17. TUDJÁK ARKHIMÉDÉSZ TÖRVÉNYÉT?

Tanár: Ismerik Önök Arkhimédész törvényét?

Második diák: Természetesen.

A folyadékba mártott testre az általa kiszorított folyadék súlyával egyenlő felhajtóerő hat.

Ez világos és egyszerű.

Tanár: Csak ne siessük el az egyszerűségre vonatkozó következtetést!

Első diák: Én feltételezem, hogy az Arkhimédész-törvény megfogalmazásában a „folyadék súlya" kifejezést a „folyadék nehézségi ereje" kifejezéssel kell helyettesíteni.

Tanár: Mire alapozza ezt?

Első diák: Ezzel ugyanazt tesszük, mint a mechanikában tettük, ahol a korábban alkalmazott „súly" kifejezést a „nehézségi erő"-vel cseréltük fel, a súly alatt pedig a megállapodás értelmében azt az erőt értettük, amely a vízszintes alátámasztási felület reakcióerejével egyenlő.

Tanár: Az Arkhimédész-törvény esetében azonban ezt nem tehetjük, itt továbbra is a „súly" kifejezést kell használni. Meggyőződhetnek erről, ha elolvassák a következő fejezetet. Előzetesen csak annyit jegyeznék meg, hogy a gyorsuló mozgással liftben a felhajtóerő nagysága a gyorsulástól függ. Térjünk tehát vissza az Arkhimédész-törvényhez!

Második diák: **Valószínű, hogy a gázokra vonatkozóan hozzá kellene tenni: a gázba „mártott" testre is hat a felhajtóerő.**

Tanár: Igaza van. És be is tudnák nekem bizonyítani Arkhimédész törvényét?

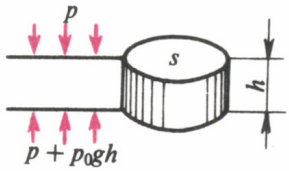
Első diák: Bebizonyítani Arkhimédész törvényét... ?

Tanár: Igen.

Első diák: De hiszen Arkhimédész törvénye közvetlenül a gyakorlati tapasztalaton alapszik.

Tanár: Ez igaz, azonban energetikai megfontolások alapján is egyszerűen levezethető. Végezzük el gondolatban a következő kísérletet: egy V térfogatú és ϱ sűrűségű testet emeljünk fel H magasságra egyszer vákuumban, egyszer pedig egy ϱ_0 sűrűségű folyadékban! Az első esetben a tárgy felemeléséhez ϱgVH energiát kell befektetnünk (ahol $\varrho V = m$). A második esetben kevesebb energiára van szükség, mivel a V térfogatú test H magasságra történő felemelése együtt jár azzal, hogy a V térfogatú folyadékmennyiség ugyanolyan távolsággal mélyebbre kerül. Ezért tehát a folyadékban a test felemeléséhez csak $(\varrho gHV - \varrho_0 gHV)$ energiára van szükség. Ha a $\varrho_0 gHV$ kivonandót egy adott erő által kifejtett munkaként fogjuk fel, akkor arra a következtetésre jutunk, hogy a vákuummal szemben a folyadékban a testre az $F = \varrho_0 gV$ erő hat, amely megkönnyíti annak felemelését. Ezt az erőt nevezik felhajtóerőnek. Könnyen beláthatjuk, hogy az erő nagysága egyenlő a test folyadékába mártott V térfogatának megfelelő mennyiségű folyadék súlyával. (Megjegyzem, hogy a fenti tárgyalás során nem vettük figyelembe azt az energiaveszteséget, amely a testnek a folyadékban történő reális elmozdulásakor a súrlódás miatt bekövetkezik.)

Az Arkhimédész-törvényt más úton is igazolhatjuk. Tegyük fel, hogy a folyadékba mártott testünk egy henger, amelynek a magassága h, az alaplap területe pedig S (83. ábra). Legyen a felső lapra



83. ábra

ható nyomás értéke p! Ekkor az alsó lapra $p + \varrho_0 gh$ nyomás hat. Ilyen módon az első és felső lapra ható nyomáskülönbség $\varrho_0 gh$. Ha ezt a nyomáskülönbséget megszorozzuk az alaplap S területével, akkor megkapjuk azt az $F = \varrho_0 ghS$ erőt, amely a testet fölfelé igyekszik a folyadékból kiszorítani. Mivel azonban $hS = V$ nem más, mint a henger térfogata, könnyen beláthatjuk, hogy ez az erő azonos az Arkhimédész törvényében szereplő felhajtóerővel.

Első diák: Most már látom, hogy Arkhimédész törvényét pusztán gondolatbeli kísérlettel is be lehet bizonyítani.

Tanár: Mielőtt hozzáfognánk a példamegoldáshoz, még ismételjük át a testek lebegésének feltételét!

Első diák: Én emlékszem erre a feltételre. Egy test akkor lebeg, ha annak súlyát...

Tanár: (közbevág) Nagyon helyes, a súlyát, nem pedig a nehézségi erejét! Folytassa, kérem!

Első diák: **Egy test akkor lebeg, ha annak súlyát az Arkhimédész törvénye szerint reá ható felhajtóerő kiegyenlíti.**

Tanár: Helyes. Lássunk egy példát! Egy edényben víz és jég van együtt. Mit tudunk mondani a víz szintjéről, ha a jégdarab elolvad?

Első diák: A víz szintje nem változik meg, mivel a jég súlyát a felhajtóerő egyenlíti ki, következésképpen az megegyezik a jég által kiszorított folyadék (esetünkben a víz) súlyával. Amikor a jég elolvad, annyi víz lesz belőle, amennyit korábban kiszorított.

Tanár: Pontosan így van. Most nehezítsük egy kicsit a feladatot. Mi történik a víz szintjével akkor, ha a jég belsejében egy idegen tárgy – például ólom – van befagyva és a jég megolvad?

Első diák: Ha nem tévedek, akkor az edényben a víz szintjének kissé csökkennie kell, de nem tudnám azt a feltételezést igazolni.

Tanár: Alkalmazzuk a következő jelölést: V – az ólom és a jég együttes térfogata, v – az ólom térfogata, V_1 – a jég alámerült része által kiszorított víz térfogata, ϱ_0 – a víz sűrűsége, ϱ_1 – a jég sűrűsége és ϱ_2 az ólom sűrűsége. A jég és az ólom együttes súlya:

$$\varrho_1 g(V-v)+\varrho_2 g v.$$

Ezt a súlyt a $\varrho_0 g V_1$ felhajtóerő egyenlíti ki. Tehát:

$$\varrho_1 g(V-v)+\varrho_2 g v = \varrho_0 g V_1. \tag{100}$$

Amikor a jég megolvad, akkor belőle V_2 térfogatú víz keletkezik, amelyet a következő egyenletből tudunk meghatározni:

$$\varrho_1 g(V-v) = \varrho_0 g V_2.$$

Behelyettesítve ezt a (100) egyenletbe, kapjuk:

$$\varrho_0 g V_2+\varrho_2 g v = \varrho_0 g V_1.$$

Innen pedig a jég olvadásakor keletkező víz térfogata:

$$V_2 = V_1 - v\frac{\varrho_2}{\varrho_0}. \tag{101}$$

Tehát a jég olvadása előtt V_1 térfogatú vizet szorítunk ki. Az olvadás után a keletkező víz és az ólom együttes térfogata $V_2 + v$ lesz. A víz szintjének változásáról úgy tudunk ítélni, ha ezt a két térfogatot egybevetjük. A (101) kifejezés alapján:

$$V_2 + v = V_1 - v\varrho_0 \frac{\varrho_2 - \varrho_0}{\varrho_0}. \tag{102}$$

Mivel $\varrho_2 > \varrho_0$ (az ólom nehezebb a víznél), a (102) alapján világos hogy $(V_2 + V) < V_1$. Ebből következik, hogy a jég olvadásakor az edényben a víz szintje csökken. Ha a $V_1 - (V_2 + v)$ térfogatok különbségét elosztjuk az edény S keresztmetszetével (az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy az edényünk egy henger), akkor megkapjuk azt a h magasságot, amellyel a jég megolvadásakor a víz szintje csökken:

$$h = \frac{v}{S} \cdot \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_0} - 1 \right). \tag{103}$$

Érthető a megoldás?

Első diák: Igen, érthető.

Tanár: Most változtassuk meg a feltételeket! Legyen az ólom helyett a jégben egy parafadarab. Mi történik ekkor a víz szintjével?

Első diák: Úgy gondolom, hogy ekkor a víz szintje kissé megemelkedik.

Tanár: Miért?

Első diák: Az ólom esetében a víz szintje csökkent. Az ólom nehezebb a víznél, a parafa pedig könnyebb. Tehát a parafánál ellentétes jelenségre számíthatunk, hogy a víz szintje megemelkedik.

Tanár: Téved. Ez akkor lenne igaz, ha a jég megolvadása után a parafa a víz alatt maradna. Világos, hogy ez nem következhet be, mivel a parafa könnyebb a víznél, mindenképpen a felszínen marad. Ezért a parafa esetét (ugyanúgy, mint bármely más, a víznél könnyebb tárgyét) külön kell vizsgálnunk. A (101) kifejezést felhasználva határozzuk meg a jég és a parafa által együttesen kiszorított, illetve a jég olvadásakor keletkező víz térfogatának különbségét:

$$V_1 - V_2 = v \frac{\varrho_3}{\varrho_0}. \tag{104}$$

Továbbá a parafa úszik a vízen, tehát felírhatjuk:

$$\varrho_3 v = \varrho_0 v_1, \tag{105}$$

ahol: v_1 – a parafa víz alá merülő részének a térfogata. Behelyettesítve ezt a kifejezést a (104) egyenletbe:

$$V_1 = V_2 + v_1.$$

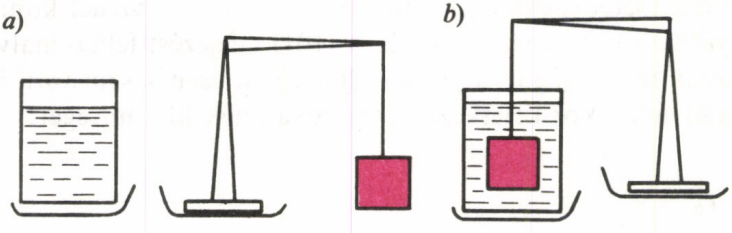
Ily módon tehát a jégdarab által kiszorított víz térfogata pontosan megegyezik a jég olvadásakor keletkező és a parafa vízbe merülő része által kiszorított víz térfogatával, tehát jelen esetben a víz szintje az edényben változatlan marad.

Első diák: És ha a parafa helyett a jégben egy levegőbuborék lenne?

Tanár: Amikor a jég megolvad, a buborékból a levegő kiszabadul. Könnyen beláthatjuk, hogy ekkor az edényben a víz szintje ugyanolyan marad, mint az olvadás előtt volt. Egyszóval ugyanaz az eset áll fenn, mint amikor a jégben parafa volt.

Első diák: Most már én is látom, hogy Arkhimédész törvénye alapján egészen érdekes feladatokat lehet kitalálni.

Tanár: Sajnálatos, hogy egyes felvételizők meglehetősen felületesen ismerik ezt a törvényt, és nem erőltetik meg magukat a vizsgára való felkészülés során, hogy alaposabban átgondolják azt. De nézzük meg a következő példát! A 84. *a)* ábrán bemutatott mérleg egyik serpenyőjén egy vízzel megtöltött edény, a másikon pedig egy állvány áll, amelyen egy súly függ. Az állványt elfordítjuk oly módon, hogy a rajta levő súlyt teljes egészében a vízbe kerüljön. Világos, hogy ekkor a mérleg kibillen egyensúlyi helyzetéből, mivel az állvány oldala könnyebb lesz (lásd 84. *b)* ábra). Mekkora súlyt kell az állvány mellé a mérleg serpenyőjére helyezni, hogy az egyensúly ismét helyreálljon?



84. ábra

Első diák: A vízben levő súlyra a térfogatnak megfelelő víz súlyával egyenlő felhajtóerő hat. Jelöljük ezt az erőt G-vel! Következésképpen a mérlegnek az állványt tartó serpenyőjére is G súlyt kell helyeznünk.

Tanár: Tévesen következtet. Gondoljon csak Newton harmadik törvényére! Eszerint ugyanis amilyen erővel az edényben levő víz hat a súlyra, ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú erővel hat a súly is a vízre. Ebből pedig az következik, hogy az állványt tartó serpenyő súlya csökken, ugyanakkor a vizes edényt tartó serpenyőé viszont megnő. Tehát az egyensúly helyreállításához $2G$ súlyra van szükség.

Első diák: Valahogyan nem egészen értem az Ön magyarázatát. A súly és az edényben levő víz kölcsönhatását ugyanis nehezen tudom azonosítani a mechanikában előforduló „két test kölcsönhatása" jelenséggel.

Tanár: Newton harmadik törvényének érvényessége nem korlátozódik csupán a mechanikai jelenségekre. A „hatás egyenlő az ellenhatással" kifejezés a legkülönbfélébb kölcsönhatási típusokra érvényes.

A fenti példát azonban másképpen is magyarázhatjuk, és ez ellen bizonyára már nem fog tiltakozni. Tekintsük a súlyt tartó állványt és a vizes edényt egy egységes rendszernek! A rendszer súlya ekkor ugye a bal oldali és jobb oldali serpenyő súlyából tevődik össze. A rendszer egészének súlya attól nem változik meg, ha annak egyes részei kölcsönhatásba lépnek egymással. Tehát, ha a kölcsönhatás következtében a jobb oldali serpenyő súlya G-vel csökken, akkor a kölcsönhatásnak azt is kell eredményeznie, hogy a bal oldali serpenyő súlya ugyanezzel a G értékkel megnő. Ebből következik, hogy a súlynak a vizes edénybe merítésekor a mérleg két karja közötti különbségnek $2G$-vel kell egyenlőnek lennie.

Feladatok:

73. Határozzuk meg egy adott test ϱ sűrűségét, ha azt egy ϱ_1 sűrűségű folyadékba merítve G_1, egy ϱ_2 sűrűségű folyadékba merítve pedig G_2 súlyúnak mérjük!

74. Ha a G súlyú testet egy ϱ_1 sűrűségű folyadékba merítjük, a súlyát G_1-nek mérjük, míg egy ismeretlen sűrűségű folyadékban G_2-nek. Határozzuk meg a második folyadékunk ϱ_2 sűrűségét!

75. Egy vízzel megtöltött, S keresztmetszetű hengeres edényben egy ólomgolyót tartalmazó jégdarab úszik. A jég és az ólom közös térfogata V és ennek 1/20-ad része áll ki a vízből. Mekkora h magassággal csökken a víz szintje az edényben, ha a jég elolvad? A sűrűségek: víz: $\varrho_v = 1\ \mathrm{g/cm^3}$, jég – $\varrho_j = 0{,}9\ \mathrm{g/cm^3}$, ólom – $\varrho_o = 11{,}3\ \mathrm{g/cm^3}$.

76. Egy S keresztmetszetű hengeres areométer, amelynek a gömbszerű alsó vége ólomgolyókkal van megtöltve, egy ϱ sűrűségű folyadékban úszik. Ha egy pillanatra még mélyebbre nyomjuk azt a folyadékban, majd elengedjük, akkor az egyensúlyi helyzete közül szabadon lengeni kezd. Határozzuk meg a lengés T periódusidejét, ha az areométer tömege M!

18. ÉRVÉNYES-E ARKHIMÉDÉSZ TÖRVÉNYE AZ ŰRHAJÓBAN?

Tanár: Érvényes-e Arkhimédész törvénye a súlytalanság állapotában levő űrhajóban?

Első diák: Szerintem nem. Mégpedig azért nem, mert Arkhimédész törvényének a lényege abban rejlik, hogy egy adott test és egy adott folyadék eltérő sűrűségének következtében (természetesen azonos térfogatok esetén) különböző munkát kell befektetnünk ahhoz, hogy azokat azonos magasságra emeljük fel. A súlytalanság állapotában kézenfekvő, hogy az említett munkák között semmiféle eltérés nincs, mivel mind a test, mind pedig a folyadék felemeléséhez szükséges munka nullával egyenlő.

Ugyanerre a végkövetkeztetésre jutunk akkor is, ha a folyadékba mártott testre ható nyomás által kifejtett munkát vizsgáljuk, mivel a felhajtóerőt a test alsó és felső lapjára ható nyomás különbsége hozza létre. A súlytalanság állapotában ez a különbség megszűnik, és vele együtt eltűnik a felhajtóerő is. Megemlíthetjük itt, hogy a súlytalanság állapotában nincs különbség „fönt" és „lent" között, tehát egyáltalán azt sem tudjuk megmondani, hogy melyik a test alsó, illetve felső lapja. Tehát a súlytalanság állapotában a folyadék belsejében a testre nem hat a felhajtóerő, azaz Arkhimédész törvénye nem érvényes.

Második diák: Én nem értek egyet társam végső következtetésével. Szerintem Arkhimédész törvénye a súlytalanság állapotában is érvényes. Legyünk egy kicsit óvatosabbak, és ne mindjárt a súlytalanság állapotát vizsgáljuk, hanem egy, a nehézségi erő g gyorsulásával azonos irányban mutató, a gyorsulással mozgó liftet. Legyen $a < g$! Könnyen beláthatjuk, hogy ebben az esetben a folyadékba mártott testre a következő nagyságú felhajtóerő hat:

$$F = \varrho_0(g-a)V. \tag{106}$$

A test térfogatának megfelelő folyadékmennyiség súlya is $\varrho_0(g-a)V$-vel egyenlő. Ily módon a felhajtóerő – a korábbihoz hasonlóan – a test által kiszorított folyadék súlyával egyenlő, tehát Arkhimédész törvénye itt is teljesül. Ha a értékét tovább növeljük, és közelítjük azt g-hez, akkor a (106) alapján a felhajtóerő egyre csökken, de ugyanilyen mértékben csökken a test térfogatának megfelelő folyadékmennyiség súlya is. Más szavakkal, azt mondhatjuk, hogy ha a értékét g-hez közelítjük, Arkhimédész törvénye változatlanul érvényben marad. Határesetben, amikor $a = g$, beáll a súlytalanság állapota. Ekkor a felhajtóerő nulla lesz, de nulla lesz a test által kiszorított folyadék súlya is. Tehát semmi sem gátol bennünket abban, hogy kimondjuk: Arkhimédész törvénye a súlytalanság állapotában is érvényben marad. A következő szemléletes példával szeretném illusztrálni állításom helyességét.

Tételezzük fel, hogy egy vízzel telt edényben egy dugó úszik. A (105) kifejezés szerint a dugó vízbe merülő részének térfogata úgy aránylik a dugó teljes térfogatához, mint a dugó és a víz sűrűsége:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\varrho_d}{\varrho_0}. \qquad (107)$$

Tegyük fel, hogy az edényünk egy liftben van elhelyezve, és a lift a gyorsulással kezd esni. Mivel közben mind a dugó, mind a víz sűrűsége változatlan marad, a (107) kifejezés továbbra is érvényes. Más szavakkal, ez azt jelenti, hogy a gyorsuló mozgást végző liftben az edényben levő víz és a dugó kölcsönös helyzete pontosan olyan marad, mint a gyorsulás nélkül volt. Világos, hogy ez a helyzet nem változik abban a határesetben sem, amikor $a = g$, tehát a súlytalanság állapotában. Ily módon, a dugó és a folyadék kölcsönös helyzete, amely Arkhimédész törvénye alapján jött létre, nem függ a lift gyorsuló mozgásától és ebben az esetben semmiféle különbséget nem tapasztalunk a gravitációs térben, illetve a súlytalanság állapotában.

Tanár: Mindkét álláspontot igen megalapozottnak tartom. Meg kell azonban mondanom, hogy a magam részéről az elsővel értek egyet: **A súlytalanság állapotában Arkhimédész törvénye nem teljesül.**

Második diák: Akkor viszont az én bizonyításomat meg kellene cáfolni.

Tanár: Rögtön megkísérlem azt. A fejtegetése két gondolatra épül. Az egyik, hogy az $a < g$ gyorsulás esetén a testet a folyadék ponto-

san Arkhimédész törvénye szerint szorítja ki belsejéből. A második, hogy ennek a feltételezésnek az $a = g$ határesetben is érvényben kell maradnia, azaz a súlytalanság állapotában. Az első gondolattal egyetértek, azonban a másodikat vitatom.

Második diák: De hiszen a dugó az edényben ugyanabban a helyzetben marad a súlytalanság állapotában is! Márpedig ezt a helyzetét Arkhimédész törvénye szabta meg.

Tanár: Igaz, hogy a dugó a súlytalanság állapotában is ugyanabban a helyzetben marad. Azonban jelen esetben már a folyadék felszínéhez viszonyított helyzetét nem Arkhimédész törvénye szabja meg. Próbálja meg a dugót a folyadék belsejébe lenyomni, meglátja, hogy a dugó abban a mélységben fog lebegni, ahol otthagyja. Ha azonban a $(g-a)$ különbség bármilyen kis értékű is, de létezik, akkor a dugó mindenképpen a folyadék felszínére kerül és az Arkhimédész törvénye által megszabott helyzetet foglalja el. Tehát a súlytalanság és a minimális mértékű „súlyosság" állapota között elvi eltérés van. Úgy is mondhatjuk, hogy a súlytalanság állapotában való áttéréskor „a legutolsó pillanatban" egy ugrás megy végbe, amely az egész szituációt minőségileg megváltoztatja.

Második diák: De mivel lehet kapcsolatos egy ilyen ugrás? Egyáltalán honnan ered ez? Hiszen az a gyorsulást folyamatosan közelítettük g-hez.

Tanár: Ez az ugrás azzal kapcsolatos, hogy az $a = g$ esetben szimmetriahelyzet áll be; eltűnik a különbség „fönt" és „lent" között, amire igen helyesen mutatott rá az első érvelés. **Ha a $(g-a)$ különbség végtelenül kis értékű, de létezik, és nem egyenlő nullával, akkor a feladatban fizikailag feltüntethetünk egy „alulról felfelé" mutató irányt. Pontosan ebben az irányban hat a felhajtóerő. Mihelyt azonban $a = g$, ez az irány elveszti értelmét és minden irány fizikailag ekvivalens lesz. Ebben áll maga az ugrás. A szimmetria eltűnése vagy megjelenése mindig ugrásszerűen megy végbe.**

19. MIT TUDNAK AZ ANYAG KINETIKUS ELMÉLETÉRŐL?

Tanár: A felvételi vizsgakérdések között szerepel egy ilyen; ismertesse az anyag kinetikus elméletének legfontosabb tételeit! Hogyan válaszolnának Önök erre a kérdésre?

Első diák: Én két alapvető tételt tudnék felsorolni. Az első, hogy minden anyag molekulából épül fel; a második pedig: a molekulák kaotikus hőmozgást végeznek.

Tanár: Jellemző a válasz: lakonikusan rövid és hiányos. Megfigyeltem, hogy a diákok általában formálisan értelmezik ezt a kérdést. Rendszerint nem tudják, mit kell elmondani a kinetikus elméletről és néhány általános jellegű megállapítással igyekeznek lezárni ezt a kérdést. Ezért tartanám szükségesnek, hogy egy kicsit részletesebben tárgyaljuk meg az anyag kinetikus elméletét. Előbb felsorolom azokat a legfontosabb megállapításokat, melyeket az elmélet alapvető tételeiként tartunk számon.

1. Az anyag „szemcsés" szerkezetű: molekulákból (atomokból) áll. Minden anyag egy mólja $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ molekulát tartalmaz, halmazállapotától függetlenül (N_A az Avogadro-szám).

2. Az anyag molekulái állandó hőmozgást végeznek.

3. A molekulák hőmozgásának jellege a közöttük fennálló kölcsönhatás sajátosságaitól függ és változik az egyik halmazállapotból a másikba történő átmenetkor.

4. A molekulák hőmozgásának intenzitása az anyag T abszolút hőmérséklettel jellemzett hőfokától függ.

Bizonyított tény, hogy az egyes molekulák $\bar{\varepsilon}$ közepes energiája arányos a T hőmérséklettel. Így pl. egyatomos molekulákra

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT \tag{108}$$

ahol $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/°K – a Boltzmann-féle állandó.

5. A kinetikus elmélet szerint egy test E teljes energiája a következő tagokból tevődik össze

$$E = E_k + E_p + U, \tag{109}$$

ahol: E_k – a test egészének kinetikus energiája; E_p – a test egészének valamely külső térben mért potenciális energiája; U – a test molekuláinak hőmozgásával kapcsolatos energia. Az U energiát a test belső energiájának nevezik.

A különböző energetikai egyenlőségek felállításakor a test belső energiájának figyelembevétele – a kinetikus elmélet jellemző vonása.

Második diák: A középiskolában megszoktuk, hogy a mól fogalma és az Avogadro-szám a kémiához tartozik.

Tanár: Igen, valószínű ezért van az, hogy a felvételizők a fizikavizsgán gyakran nem tudják, mi az a mól, és rendszerint meg vannak róla győződve, hogy az Avogadro-szám csak a gázokra vonatkozik. Jól jegyezzük meg: a mól az anyag molekulasúlyával megegyező grammnyi mennyisége (és korántsem a molekula grammokban kifejezett tömege, amint azt néhol hallani lehet); a grammatomsúly pedig az anyag atomsúlyával megegyező grammnyi mennyisége; az Avogadro-szám bármely anyag egy móljában levő molekulák (vagy a grammatomsúlyban levő atomok) számát adja meg, a halmazállapottól függetlenül.

Itt szeretném megjegyezni, hogy **az Avogadro-szám egy sajátságos „híd" szerepét tölti be az anyag makroszkopikus és mikroszkopikus sajátosságai között.**

Például az Avogadro-szám segítségével teremthetünk kapcsolatot az anyag molekuláinak (atomjainak) sűrűsége és tömege, illetve az olyan mikroparaméter között, mint a molekulák (atomok) közepes távolsága. Vegyük például a szilárd halmazállapotú vasat. Ennek sűrűsége: $\varrho = 7{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$, atomsúlya pedig $A = 56$. Számítsuk ki a vas atomjainak közepes távolságát! A következő megfontolások alapján végezzük a számítást: az A g vas N_A atomot tartalmaz, tehát 1 g vasban N_A/A atom van. Ebből következik, hogy 1 $\mathrm{cm^3}$ vas $\varrho N_A/A$ atomot tartalmaz. Ily módon a vas egy atomjának térfogata $A/(\varrho N_A)$ $\mathrm{cm^3}$. Az atomok keresett közepes távolsága közelítőleg a térfogat köbgyökével egyenlő:

$$x \approx \sqrt[3]{\frac{A}{\varrho N_A}} = \sqrt[3]{\frac{56}{7{,}8 \cdot 6 \cdot 10^{23}}}\ \mathrm{cm} \approx 2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}.$$

Második diák: Korábban azt tetszett mondani, hogy a molekulák hőmozgásának jellege a molekulák közötti kölcsönhatástól függ és halmazállapot-változáskor ez a jelleg is megváltozik. Kérem, beszéljen erről valamivel többet!

Tanár: Két molekula kölcsönhatását kvalitatíve a 85. ábrához hasonló görbével jellemezhetjük. A görbe a két molekula kölcsönhatásának W potenciális energiáját mutatja be a molekulák középpontjainak távolsága függvényében. A molekulák elegendően nagy távolsága esetén a $W(r)$ görbe aszimptotikusan közelít nullához, azaz a molekulák közötti kölcsönhatás gyakorlatilag megszűnik. Ha közelítjük őket egymáshoz, vonzóerő lép fel közöttük, a $W(r)$ görbe süllyedni kezd. Majd egy bizonyos távolságon belül a molekulák taszítani kezdik egymást (ez a taszítás egyben azt is jelenti, hogy egyik molekula sem képes szabadon behatolni a másik belsejébe). Könnyen beláthatjuk, hogy a $W(r)$ görbe egy jellegzetes minimummal rendelkezik.

Második diák: Mit jelent az, hogy az energia negatív?

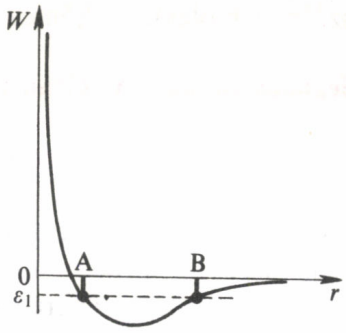
Tanár: Ismeretes, hogy az energia értékét bármely értéktől kiindulva mérhetjük. Például egy kő potenciális energiáját megadhatjuk az adott terepszakasz szintjére, de ugyanúgy a tenger szintjére vonatkoztatva is – ez teljesen mindegy. Esetünkben nullának vettük azt az energiát, amellyel két, egymástól végtelen távolságra levő molekula hat egymásra. Ezért **a molekula negatív energiája azt jelenti, hogy az kötött állapotban van (a másik molekulához). Ezt a molekulát úgy tudjuk „kiszabadítani", ha vele akkora energiát közlünk, hogy a molekula energiája elérje a nulla szintet.**

Tegyük fel, hogy a molekula a 85. ábrán ε_1-gyel jelölt negatív energiával rendelkezik.

Az ábrából kitűnik, hogy ebben az esetben az adott molekula a szomszédjától nem képes a B ponttól jobban eltávolodni, illetve az A pontnál jobban megközelíteni azt.

Ez azt jelenti, hogy a molekula a szomszédos molekula vonzási terében az A és B pont között fog rezegni (pontosabban: a kötött rendszert alkotó mindkét molekula rezegni fog).

A gázokban a molekulák közepes távolsága annyira nagy, hogy azok gyakorlatilag nincsenek egymással kölcsönhatásban. Minden egyes molekula a többitől függetlenül képes elmozdulni, és ezek igen ritkán ütköznek össze. Eközben **minden molekula három fajta mozgásban vesz részt: haladó mozgást végez; forgó mozgást végez;**



85. ábra

és a molekulán belül az atomok egymáshoz viszonyítva rezegnek. Az egyatomos molekula csak haladó mozgást végez.

A kristályban a molekulák olyan közel vannak egymáshoz, hogy valamennyi együtt egységes rendszert alkot. Ekkor minden molekula egy közös erőtérben rezeg, amely tér az összes molekula kölcsönhatásaként alakul ki. A kristályra mint egységesen kötött molekularendszerre a térbeli rendezett szerkezet, az ún. kristályrács létezése a jellemző.

A kristályrács pontjai az egyes molekulák egyensúlyi helyzetének felelnek meg. Ezen csúcsok körül végzik a molekulák az összetett rezgőmozgást.

Meg kell itt jegyeznünk, hogy a kristály képződésekor egyes esetekben a molekulák bizonyos mértékig megtartják önállóságukat. Ekkor a molekulák kétféle rezgőmozgását különböztetjük meg: a molekula rezgését a kristály erőterében és az atomok rezgését az egyes molekulákon belül. Ezzel a jelenséggel akkor találkozhatunk, ha a molekulán belül a kötési energia lényegesen nagyobb a molekulák kristályrácskötési energiájánál. Az esetek többségében azonban a molekulák nem képesek megtartani önállóságukat, ezért a kristályrács nem molekulákból, hanem atomokból épül fel. Ebben az esetben természetesen a molekulán belüli rezgőmozgás eltűnik, és csupán a kristályrács terében végzett rezgés létezik.

Ez az a minimum, amelyet minden felvételizőnek tudnia kell az anyag atomi és molekuláris hőmozgásának jellegzetességeiről. Ha a felvételizőket az anyagon belüli hőmozgásról kérdezzük, rendszerint arra az egyetlen szóra korlátozzák válaszukat, hogy úgymond „kaotikus mozgás", leplezni igyekezvén ezzel bővebb ismereteik hiányát.

Második diák: Eddig nem tetszett nekünk szólni a molekulák hőmozgásáról a folyadékokban.

Tanár: **A folyadékmolekulák hőmozgása a legbonyolultabb. A folyadék – mivel közbenső helyet foglal el a gázok és a kristályok között – az erős részecsketípusú kölcsönhatás mellett igen kifejezetten rendezetlen struktúrával rendelkezik.**

Tudjuk, hogy a kristályok vizsgálatát igen nehezíti a részecskék erős kölcsönhatása, ugyanakkor ezt a nehézséget jelentősen csökkenti a rendezett struktúra – a kristályrács – jelenléte. Ismeretes az is, hogy a gázok vizsgálatát az egyes részecskék helyzetének rendezetlensége nehezíti, viszont kompenzálja ezt a hatást, hogy a részecskék között gyakorlatilag egyáltalán nincs kölcsönhatás. A folyadékok esetében azonban mindkét nehézség fennáll, ugyanakkor semmiféle kompenzáló hatással nem találkoztunk. Azt mondhatjuk, hogy a folyadékmolekulák rendszerint teljesen megőrzik önállóságukat. A folyadékra a legkülönfélébb mozgási típusok létezése jellemző: a molekulák elmozdulása, a forgó mozgása, az atomok rezgése a molekulán belül és a molekula rezgése a szomszédos molekulák erőterében. A legnagyobb nehézséget az jelenti, hogy – ha pontosak akarunk lenni – ezeket a mozgási típusokat nem vizsgálhatjuk külön-külön (ahogy mondani szokták: „tisztán"), mivel az egyes mozgások erős kölcsönhatásban állnak egymással.

Második diák: Én nem értem, hogyan lehet összehangolni a molekulák elmozdulását és a szomszédos molekulák erőterében végzett rezgőmozgást.

Tanár: Különféle modellek léteznek, amelyek megkísérlik összehangolni ezeket a mozgásfajtákat. Az egyik modell például a következőképpen magyarázza a molekula viselkedését: a molekula egy bizonyos ideig a szomszédos molekulák erőterében rezeg, majd ugrásszerűen átmegy egy másik környezetbe, ahol ismét az előbbihez hasonlóan rezeg, majd ismét helyet változtat stb. Ezt a modellt „ugrásos diffúziós modellnek" nevezik.

Második diák: Számomra úgy tűnik, hogy a kristályokban az atomok diffúziójának pontosan így kell végbemennie.

Tanár: Igaza van, csak egy dolgot ne feledjen el, hogy a kristályokban ez a folyamat erősen lassított: az új környezetbe ugrás sokkal ritkábban megy végbe.

Létezik egy másik modell is, amely szerint a folyadék egy adott molekulája a szomszédos molekulák erőterében rezeg, ugyanakkor

ez az egész környezet folytonosan változtatja helyzetét a térben („úszik") és közben állandóan deformálódik. Ezt a modellt „folytonos diffúziós modellnek" nevezik.

Második diák: Azt tetszett mondani, hogy a folyadék közbenső helyet foglal el a kristályok és a gázok között. Mégis, melyikhez áll közelebb?

Tanár: Na, mit gondol?

Második diák: Én úgy gondolom, hogy a folyadékok a gázokhoz állnak közelebb.

Tanár: A valóságban azonban a folyadékok inkább a kristályokhoz állnak közelebb. Erre utalnak a sűrűségek, a fajhő, a folyadékok és gázok hőtágulási együtthatói számértékének közeli értékei is. Ismeretes az is, hogy az olvadási hő értéke lényegesen kisebb a párolgási hőnél. Mindezek a tényezők arról tanúskodnak, hogy **a részecskék közötti kölcsönhatási erő a folyadékokban és a kristályokban igen hasonló egymáshoz.** Az említett hasonlóságra utal az a jelenség is, amelyet a röntgensugárzás szóródási kísérleteiben észleltek, nevezetesen, hogy a folyadékatomok elhelyezkedésében létezik bizonyos rendezettség, amely „lokális rendezettség" néven ismeretes.

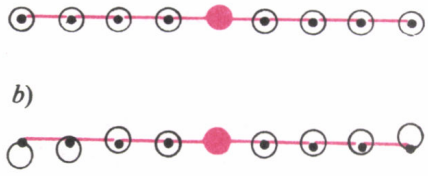
Második diák: Mit jelent ez a kifejezés?

Tanár: A lokális rendezettség azt jelenti, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott atom vagy molekula körül bizonyos számú szomszédos atom vagy molekula rendezetten helyezkedik el. A kristályokkal ellentétben, ez a kiválasztott atomra vonatkozó rendezettség azonban megszűnik a tőle való távolodáskor és nem vezet kristályrács képződéséhez. Kis távolságokon viszont tökéletesen hasonló az atomok elhelyezkedése, mint ugyanazon anyag szilárd fázisában. A 86. *a)* ábra egy távolabbi rendezettségű atomláncot mutat be, míg a 86. *b)* ábrán összehasonlításul a lokális rendezettséget láthatjuk.

A folyadékok és kristályok hasonlósága szülte a folyadékokra a „kvázikristály" kifejezést.

a)

b)



86. ábra

Második diák: Ebben az esetben viszont elképzelhető, hogy a folyadékokat a kristályokhoz hasonlóan vizsgálhatjuk?

Tanár: Óva intem magukat attól, hogy visszaéljenek a kváziskristály kifejezéssel, és indokolatlanul nagy jelentőséget tulajdonítsanak annak. Szem előtt kell tartani először is azt, hogy bár a folyadékállapotnak egy széles hőmérsékleti intervallum felel meg, mégsem várható, hogy a folyadék strukturális és dinamikai tulajdonságai azonosak (vagy legalább közel azonosak) lesznek ebben a teljes tartományban.

Világos, hogy a kritikus állapot közelében a folyadéknak el kell veszítenie a szilárd anyagokkal való mindenféle hasonlóságot, és folyamatosan át kell mennie gáz halmazállapotba.

Ily módon tehát, még ha a kvázikristály kifejezés a folyadékokra érvényes is, akkor sem túl messze az olvadásponttól. Másodszor pedig: a molekulák közötti kölcsönhatás jellege az egyes folyadékokban különböző, és ebből következik, hogy a kvázikristály kifejezés az eltérő folyadékokra eltérő mértékben érvényes. Így például a víz kifejezettebben kvázikristályos folyadék, mint a megolvasztott fémek. Ezzel kapcsolatos a víznek egy sor jellegzetes tulajdonsága, amelyről a 20. órában még bővebben szó lesz.

Második diák: Úgy tűnik, hogy a molekulák hőmozgása a folyadékokban nem valami egyszerű jelenség!

Tanár: Igen, helyes az észrevétele. Viszonylag egyszerűek általában a határesetek. Az általános eset azonban mindig is összetett.

Első diák: Van a vizsgakérdések között egy ilyen is: az anyag kinetikus elméletének igazolása. Ha nem tévedek, itt a Brown-féle mozgásról kell beszélni?

Tanár: Igen, a Brown-féle mozgás ragyogóan bizonyítja a gyakorlatban a kinetikus elmélet alapvető tételeit. De tudja, hogy mi is az a Brown-féle mozgás?

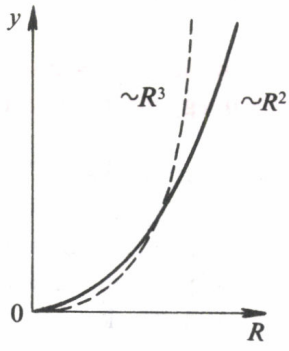
Első diák: A Brown-féle mozgás a molekulák termikus elmozdulását jelenti.

Tanár: Ez tévedés! A Brown-féle mozgás ugyanis szokásos méretű mikroszkóppal is megfigyelhető. Tehát **a Brown-féle mozgás nem más, mint az anyag apró részecskéinek a közeg termikus mozgást végző molekuláival történő ütközések hatására bekövetkező elmozdulása. Molekuláris szempontból azonban ezek a részecskék már makroméretűek, csupán a mindennapi értelemben nagyon kicsik. A molekulák véletlenszerű ütközései folytán, amelyek szimmetria hiányá-**

ban nem kompenzálják egymást, a Brown-féle részecskék kaotikus kilengést és ezzel együtt, a rendszerint folyadék hordozóanyagban, elmozdulást végeznek.

Második diák: De miért kell a Brown-féle részecskéknek mégis viszonylag kis méretűeknek lenni? Miért nem figyelhető meg a Brown-féle elmozdulás szemmel is látható anyagi részecskék, pl. a pohár teában levő tealevelek esetében?

Tanár: Ennek két oka van. Az első, hogy a részecske felületén a molekulák ütközésének száma egyenesen arányos ezzel a felülettel, a részecske tömege viszont a térfogattal arányos. Tehát a részecske R lineáris méretének növelésekor a molekuláknak a részecske felületéhez történő ütközési száma R^2-nal arányosan nő, amíg az a tömeg, amelyet az ütközésnek ki kellene mozdítani adott helyzetéből, R^3-nal lesz arányos. Éppen ezért a molekulák egyre nehezebben tudják a részecskét elmozdítani. Hogy világosabb legyen, a 87. ábrán egy koordináta-rendszerben ábrázoltuk az $y=R^2$ és az



87. ábra

$y = R^3$ függvényt. Könnyen belátható, hogy a négyzetes összefüggés kis R értéknél, míg a köbös a nagy R-eknél haladja meg a másikat. Ez azt jelenti, hogy kis R értéknél a felületi, nagy R értéknél viszont a térfogati jelenségek dominálnak. Másodszor: a Brown-féle részecskének elegendően kicsinek kell lenni ahhoz, hogy a molekulák ütközései ne kompenzálják egymást, azaz az egységnyi idő alatt balról, illetve jobbról bekövetkező ütközések számának jelentős mértékben különbözni kell egymástól. Az ütközések számának ez a különbsége pedig annál nagyobb lesz, minél kisebb a részecske felülete.

Vizsgáljuk meg most a kinetikus elképzelések szerint a folyadékok párolgását és forrását! Hogyan magyaráznák a párolgás jelenségét?

Első diák: A párolgás azt jelenti, hogy a folyadék leggyorsabb molekulái leküzdik a környező molekulák részéről jelentkező vonzóerőt és kirepülnek a folyadékból.

Tanár: Mi segíti elő a párolgást?

Első diák: Először, ha megnöveljük a folyadék felületét, másodszor pedig, ha a folyadékot melegítjük.

Tanár: Nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy **a párolgás nem egyirányú, hanem oda-vissza folyamat, tehát azzal együtt, hogy a folyadékból molekulák távoznak, egy részük vissza is tér a folyadékba.** A párolgás annál erőteljesebb, minél jobban előtérbe jut a molekulák kilépése a folyadékból a fordított folyamattal szemben. A folyadék melegítése és felületének növelése valóban elősegíti a párolgást. Ezzel párhuzamosan ismeretesek azonban olyan eljárások is, amelyek a molekuláknak a folyadékba való visszatérését akadályozva segítik elő a folyamatot. Például szélben a kilépő molekulák eltávoznak a felület környezetéből és ezzel csökken annak valószínűsége, hogy visszakerülnek a folyadékba. Ezért van, hogy a nedves tárgyak szélben gyorsabban száradnak.

Ha a folyadékból kilépő és oda visszatérő molekulák száma kompenzálja egymást, akkor beáll a dinamikai egyensúly: a folyadék fölötti gőzréteg telítetté válik.

Bizonyos esetben a párolgás csökkentésére van szükség. Nem kívánatos például, hogy a kenyérből a vízpára gyorsan távozzon. A kenyeret a kiszáradástól úgy óvjuk, hogy zárt edénybe (dobozba, tasakba stb.) helyezzük azt. Ezzel tulajdonképpen megakadályozzuk a kilépett molekulák eltávozását. Ily módon a kenyér felülete mentén telített gőzréteg alakul ki, amely meggátolja a víz további párolgását a kenyérből.

Most pedig magyarázza meg, kérem, a forrást!

Első diák: A forrás tulajdonképpen intenzív párolgás.

Tanár: Egyáltalán nem tetszik nekem ez a meghatározás. Hozzá kell tennem, hogy igen sok felvételiző nincs tisztában a forrás lényegével. A folyadék melegítésével csökken a benne levő gázok oldhatósága, ezért a folyadék belsejében (az edény falán) ez a gáz buborékok formájában kiválik. A buborékokban párolgás megy végbe, így azok telített vízgőzzel telnek meg. A vízgőz nyomása azonban a hőmérséklet növelésekor egyre nő, majd egy bizonyos hőmérsékletnél a buborékon belüli gőznyomás kiegyenlíti a buborékra kívülről ható nyomást (ez a külső nyomás az atmoszferikus

nyomás és a folyadékoszlop hidrosztatikus nyomásának összegéből adódik). Ettől a pillanattól kezdve a buborékok a folyadék felszínére igyekszenek, és ez maga a forrás. Láthatjuk tehát, hogy **a folyadékok forrása a párolgástól merőben eltérő jelenség.** Felhívom a figyelmüket, hogy a párolgás minden hőmérsékleten végbemegy, míg a forrás csak egy adott hőfokon, amelyet forráspontnak nevezünk. Emlékeztetem Önöket arra is, hogy ha a forrás megindul, akkor a folyadék hőmérséklete annak ellenére sem növekszik tovább, hogy továbbra is folyamatosan hőt közlünk azzal. A hőmérséklet mindaddig a forrásponton marad, amíg az egész folyadékmennyiség el nem forr.

A fenti megfontolások alapján világos, hogy a külső nyomás csökkenésével a folyadék forráspontjának is csökkennie kell. Ezzel kapcsolatos lenne a következő kérdésem.

Egy lombikban szobahőmérsékleten víz látható. Mi történik a vízzel, ha a fölötte levő levegőt vákuumszivattyúval leszívjuk a lombikból?

Első diák: A levegő leszívása során a lombikban csökken a nyomás. A nyomással együtt csökken a víz forráspontja is. Amikor a forráspont a szobahőmérsékletre lecsökken, a víz a lombikban forrni kezd.

Tanár: Előfordulhat-e, hogy a víz nem forrni kezd, hanem megfagy?

Első diák: Nem is tudom. Azt hiszem, hogy ez kizárt dolog.

Tanár: Pedig minden csupán attól függ, hogy milyen módon végezzük a leszívást. Ha a levegő elszívása elegendően lassan történik, akkor a víz előbb-utóbb forrni kezd. Ha azonban a levegőt gyorsan távolítjuk el, akkor a víz bizony megfagy. A levegő – és vele együtt a vízgőz – leszívása ugyanis ekkor növeli a párolgást. Mivel a párolgás során a magasabb energiájú molekulák hagyják el a folyadékot, ez a víz lehűléséhez vezet. Lassú leszívatáskor a víz lehűlését a környezetből felvett hőmennyiség kompenzálja, ezért a víz hőmérséklete a korábbi marad. Ha azonban a leszívás nagyon gyors, akkor a környezetből felvett hő nem képes kompenzálni a víz lehűlését. Ha a víz hőmérséklete csökkenni kezd, ezzel csökken a forrás valószínűsége is. Ha folytatjuk a levegő gyors leszívását, egy idő után a víz hőfoka a dermedési pontra csökken, és a víz el nem párolgott része megfagy.

20. MIVEL MAGYARÁZHATÓ A VÍZ HŐTÁGULÁSKOR TAPASZTALHATÓ KÜLÖNLEGES VISELKEDÉSE?

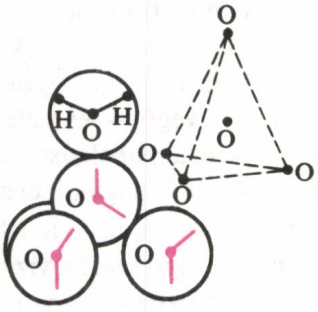
Tanár: Miben áll a víz hőtágulásakor tapasztalható viselkedésének különlegessége?

Első diák: Ha a vizet melegítjük, 0 és 4 °C között összehúzódik, majd további melegítésre kezd kitágulni.

Tanár: Mivel magyarázható ez a különös jelenség?

Első diák: Nem tudnám megmondani.

Tanár: A magyarázat a víz szerkezetének vizsgálata alapján adható meg. **A vízmolekulák kitüntetett irányokban lépnek egymással kölcsönhatásba. Minden egyes molekula csak négy másikat képes magához kötni. Az így összekapcsolt molekulák csúcspontjai egy tetraédert alkotnak** (88. ábra).



88. ábra

Ily módon egy meglehetősen laza, áttört szerkezet keletkezik, amely a víz kvázikristály-állapotáról tanúskodik. Természetesen a víz – és minden folyadék – szerkezetéről csakis a lokális rendezettség határain belül (lásd 19. óra) beszélhetünk. A kiválasztott molekulától távolodva a rendezettség fokozatosan megszűnik, aminek az az oka, hogy a molekulák kötése megtörik, majd eltűnik. A hőmérséklet növelésekor a molekulák kötődése egyre gyakrabban meg-

bomlik, nő a szabad molekulák száma, amelyek kitöltik a tetraéderes szerkezet üres helyeit. A víz kvázikristályos jellege csökken. A víz, mint kvázikristályos képződmény fent leírt laza szerkezete teszi érthetővé annak fizikai tulajdonságaiban mutatkozó anomáliákat, többek között a víz hőtágulása során jelentkező rendellenességeket is. Egyrészt a hőmérséklet növelésével megnő az atomok közepes távolsága a molekulán belüli rezgőmozgás eredményeként, azaz olyan helyzet áll elő, mintha a molekula kissé „megduzzadna". Másrészt viszont, a hőmérséklet emelésével a víz laza struktúrája összeomlik, ami természetesen azt jelenti, hogy maguk a molekulák közelebb kerülnek egymáshoz. Az első effektus (a rezgési jelenség) eredményeként csökken a víz sűrűsége. Ez a szilárd testek szokásos hőtágulási jelenségével egyezik meg. Ugyanakkor a második jelenségnek (a struktúra összeomlásának) oda kell vezetnie, hogy melegítés hatására a víz sűrűsége megnövekedjen. A 4 °C alatti melegítéskor a struktúra összeomlásával kapcsolatos jelenség dominál, ezért a víz sűrűsége nő. További melegítésre azonban a rezgési effektus egyre jelentősebbé válik, ezért a víz sűrűsége csökkenni kezd.

21. TUDJÁK, MI AZ AZ IDEÁLIS GÁZ?

Tanár: Meg tudnák nekem mondani, mit nevezünk ideális gáznak?

Első diák: Az ideális gázra valamennyi általunk ismert gáztörvény teljesül, nevezetesen a Boyle – Mariotte-törvény, Gay – Lussac törvénye, Charles törvénye és az egyesített gáztörvény.

Második diák: Ez tulajdonképpen egy olyan gáz, amelynek a molekulái nincsenek egymással kölcsönhatásban. Az ideális gáz a reális gázok egyszerűsített modellje.

Tanár: Valóban igaz, hogy az általunk ismert valamennyi gáztörvény éppen az ideális gázokra érvényes. Az is igaz, hogy az ideális gáz a reális gáz egyszerűsített modellje. Nem teljesen helytálló azonban az ideális gáz molekuláinak kölcsönhatását kizáró kijelentés.

Az ideális gáz esetében a molekuláknak nem maga a kölcsönhatása, hanem a kölcsönhatás energiája hanyagolható el. Ebből következik, hogy a gáz U belső energiája csupán a molekulák kinetikus energiájának összegével lesz egyenlő.

Tegyük fel például, hogy a gáz egyes molekulájának közepes kinetikus energiája $\bar{\varepsilon}$. A molekulák száma legyen N. Általános esetben a gáz U belső energiáját a következő kifejezés szolgáltatja:

$$U = N\bar{\varepsilon} + U', \tag{110}$$

ahol U' – a gázmolekulák kölcsönhatásának potenciális energiája. Ideális gáz esetén viszont a (110) kifejezés egyszerűsödik:

$$U = N\bar{\varepsilon}, \tag{111}$$

illetve (108) behelyettesítésével a következő alakot ölti:

$$U = \frac{3}{2}NkT. \tag{112}$$

Második diák: A molekulák U' kölcsönhatási energiáját minden esetben elhanyagolhatjuk?

Tanár: Természetesen, nem minden esetben. Az

$$N\bar{\varepsilon} \gg U' \tag{113}$$

feltétel teljesüléséhez elengedhetetlen, hogy $N\bar{\varepsilon}$ értéke növekedjen, U' értéke pedig csökkenjen. Az első feltétel elegendően magas hőmérsékleten, a második pedig erős ritkítás esetén teljesül. Azt mondhatjuk tehát, hogy **egy gázt akkor tekinthetünk ideálisnak, ha az elegendően meleg és ritka.**

A gáz hűtése és összenyomása alkalmával előbb-utóbb elérjük azt az állapotot, amikor a molekulák kölcsönhatási energiáját már nem szabad figyelmen kívül hagyni. Az olyan gázokat, mint a nitrogén és az oxigén, szokásos körülmények mellett jó közelítéssel tekinthetjük ideális gázoknak.

Első diák: És mit tetszik a „szokásos körülmények" alatt érteni?

Tanár: A normál állapothoz közeli körülményeket. Emlékezzenek arra, hogy a normál hőmérséklet 273 °K (azaz 0 °C), a normál nyomás pedig 760 Hgmm vagy $1{,}02 \cdot 10^3$ Pa (1 Pa [Pascal] = 1 Nm^{-2}).

Most tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy bizonyos mennyiségű ideális gáz. Milyen paraméterek határozzák meg a gáz állapotát?

Első diák: A p nyomás, a V térfogat és a t hőmérséklet.

Második diák: Bizonyára előnyösebb a hőmérsékletet abszolút hőmérsékletben (T) kifejezni. Ezenkívül még egy paramétert kell figyelembe venni, a gáz m tömegét.

Tanár: Igaza van. Csupán annyit jegyeznék meg, hogy az m tömeg helyett a gázmolekulák N számát is vehetjük.

Ezek után próbáljanak meg válaszolni a következő kérdésre: megváltoztathatjuk-e az említett négy paraméter (p, V, T, N) valamelyikét úgy, hogy a többi közben változatlan maradjon?

Első diák: Szerintem nem.

Második diák: Két paramétert megváltoztathatunk úgy, hogy a többi változatlan maradjon.

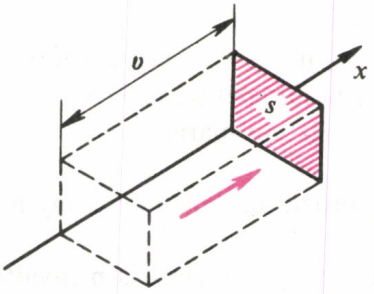
Tanár: Ez utóbbi válasz a helyes. Három paramétert is megváltoztathatunk úgy, hogy a negyedik változatlan maradjon, sőt megváltoztathatjuk mind a négy paramétert is. Nem tudunk azonban egyetlen paramétert úgy változtatni, hogy vele együtt másik is ne változna meg. Ez pedig azt jelenti, hogy **a gáz p, V, T, N négyes paramétere között meghatározott összefüggés áll fenn. Az összefüg-**

gést leíró kifejezést az ideális gáz állapotegyenletének nevezzük. Az egyenlet fontosságára való tekintettel nézzük meg annak egyszerűsített levezetését. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a gáz minden egyes molekulája azonos v sebességgel mozog az x, y, z tengely mentén – a pozitív és negatív irányokat is figyelembe véve – a lehetséges hat közül valamelyik irányban.

A p nyomást az F erő merőleges irányú összetevőjeként foghatjuk fel, amely például az edény falának egységnyi felületére hat. Newton törvénye értelmében az erő értéke megegyezik az impulzus egységnyi időre eső változásával. Tehát az edény falára gyakorolt nyomás egyenlő az egységnyi idő alatt egységnyi felületbe ütköző molekulák impulzusváltozásának összegével. Tételezzük fel, hogy a falra merőleges irányban egy m tömegű molekula v sebességgel repül. A rugalmas ütközés következtében a molekula mozgási iránya 180°-kal megváltozik és ugyanakkora sebességgel pattan le a falról. A molekula impulzusának változása $2mv$ értékű lesz. Tegyük fel, hogy az S felületű fallal egységnyi idő alatt n számú molekula ütközik úgy, hogy minden egyes molekula a felületre merőlegesen, v sebességgel mozog. Akkor a nyomás értéke:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{2mvn}{S}. \tag{114}$$

A továbbiakban vizsgáljuk az x tengelyre merőleges S felületet (89. ábra)! Az egyszerűsítő feltételezés szerint az x tengely mentén



89. ábra

az S felületre merőleges irányban az összes molekula 1/6 része mozog. Egységnyi idő alatt az ábra vS térfogatnyi részében tartózkodó és a felület irányában mozgó valamennyi molekula eléri azt.

Tehát az ütközések száma $\frac{1}{6} \cdot \frac{N}{V} \cdot vS$ lesz. Ez lesz a (114) kifejezésben szereplő n értéke. Tehát a nyomás:

$$p = \frac{2mvn}{S} = \frac{1}{3}mv^2 \cdot \frac{N}{V} \cdot$$

Mivel azonban $\frac{mv^2}{2} = \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT$, a kifejezés végső alakja:

$$pV = NkT. \tag{115}$$

A (115) az ideális gázok keresett állapotegyenlete. Meg kell jegyezni, hogy ez a kifejezés az egyszerűsítő feltételezések alapján történt levezetés ellenére is pontos (ugyanerre az eredményre jutottunk volna az egyszerűsítő feltételezések nélkül is).

Első diák: Én először látom ezt a kifejezést.

Tanár: Nem hiszem! Mindjárt Ön is megismeri. Fejtsük ki N értékét:

$$N = N_A \frac{m}{\mu}, \tag{116}$$

ahol: N_A – az Avogadro-szám, m – a gáz tömege, μ – egy mól tömege, $\frac{m}{\mu}$ pedig a gáz mólszáma.

Helyettesítsük be (116)-ot (115)-be:

$$pV = N_A \frac{m}{\mu} kT.$$

Vezessük be az

$$N_A k = R \tag{117}$$

jelölést, ahol R az úgynevezett univerzális gázállandó, ekkor

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \tag{118}$$

Második diák: Így már ismerős a kifejezés. Mengyelejev – Clapeyron-egyenletnek neveztük.

Tanár: Igaza van. Ez az ideális gáz állapotegyenletének egyik alakja.

Első diák: Ez az egyesített gáztörvényt fejezi ki.

Tanár: Engedje meg, hogy ezzel kapcsolatban egy igen lényeges megjegyzést tegyek: ennek a kifejezésnek semmi köze az egyesített gáztörvényhez. Az a helyzet ugyanis, hogy valamennyi gáztörvény a gáz állapotváltozását írja le, és a kezdeti és végső állapot között teremt összefüggést. Ugyanakkor a (115) és (118) kifejezések egy és ugyanazon állapot paraméterei közötti összefüggést írják le.

Első diák: Akkor hogyan írható fel az egyesített gáztörvény matematikai alakja?

Tanár: A gáztörvényekre hamarosan rátérünk. Most azonban még egy megjegyzést szeretnék tenni. Tételezzük fel, hogy egy adott tömegű gázzal rendelkezünk. Ennek a gáznak az állapotát mindössze két paraméterrel már meghatározhatjuk. Ez lehet a p és V, vagy a V és T, vagy a p és T. Ily módon a gáz egy adott állapotának a $p-V$, illetve a $V-T$ vagy a $p-T$ koordináta-rendszerben egy konkrét pont felel meg.

22. MILYEN GÁZTÖRVÉNYEKET ISMERNEK?

Tanár: Még egyszer hangsúlyoznám: **Valamennyi gáztörvény a gáz valamilyen állapotváltozását írja le. Más szavakkal: a gáztörvény mindig a kezdeti és végső állapot paraméterei között teremt összefüggést.**

Az ideális gáz (118) állapotegyenletét felhasználva vezessük le az egyesített gáztörvény egyenletét! Vizsgáljuk meg valamely gáz két állapotát: a p_1, V_1, T_1, m_1 paraméterekkel jellemzett kezdeti és a p_2, V_2, T_2, m_2 paraméterekkel jellemzett végső állapotait. A kezdeti állapot egyenlete:

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} R T_1, \text{ illetve } \frac{p_1 V_1}{m_1 T_1} = \frac{R}{\mu} \qquad (118.\ a)$$

míg a végső állapot egyenlete:

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu} R T_2, \text{ illetve } \frac{p_2 V_2}{m_2 T_2} = \frac{R}{\mu} \qquad (118.\ b)$$

lesz.

Mivel a (118. *a*) és (118. *b*) egyenletek jobb oldalán álló kifejezések megegyeznek, egyenlőnek kell lenni a bal oldaliaknak is, tehát:

$$\frac{p_1 V_1}{m_1 T_1} = \frac{p_2 V_2}{m_2 T_2}. \qquad (119)$$

Ily módon a legáltalánosabb alakban kapcsolatot teremtettünk a kezdeti és a végső állapot paraméterei között. Ez az egyenlet maga az egyesített gáztörvény.

Természetesen felírhatjuk ezt a következő alakban is:

$$\frac{pV}{mT} = \text{konst.} \qquad (119.\ a)$$

Második diák: Mi a következő egyszerűbb kifejezést tanultuk az egyesített gáztörvényre:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \text{ illetve } \frac{pV}{T} = \text{konst.} \tag{120}$$

Tanár: A (120) egyenletet a (119)-ből kapjuk, ha feltételezzük, hogy a kezdeti és végállapot közötti átmenet során a gáz tömege nem változik meg (azaz $m_1 = m_2$). A továbbiakban elfogadjuk, hogy ez a feltétel teljesül, és akkor valóban alkalmazhatjuk a (120) egyenletet.

A (120) egyenlet alapján áttérhetünk az egyedi esetekre, az úgynevezett izo-folyamatokra:

a) ha a hőmérséklet állandó, izotermikus folyamatról beszélünk (Boyle – Mariotte törvénye):

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \text{ illetve } pV = \text{konst;} \tag{121}$$

b) ha a nyomás állandó, izobár folyamatról beszélünk (Gay – Lussac törvénye):

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \text{ illetve } \frac{V}{T} = \text{konst;} \tag{122}$$

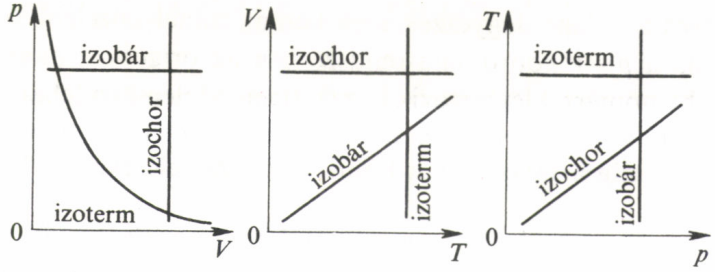
c) ha a térfogat állandó, izochor folyamatról beszélünk (Charles törvénye*):

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \text{ illetve } \frac{p}{T} = \text{konst.} \tag{123}$$

Ezeket az izo-folyamatokat meghatározott síkbeli grafikonok fejezik ki (például a $p - V$ koordináta-rendszerben).

A 90. ábrán az egyes izo-folyamatokat ábrázoltuk a $p - V$, $V - T$ és a $T - p$ koordináta-rendszerben. Itt jegyzem meg, hogy a felvételizők az izo-folyamatok ábrázolását a $p - V$ koordináta-rendszerben általában ismerik, de ha azt kérem, hogy más koordináta-rendszerben rajzolják fel azokat, akkor már megakadnak.

* Ezt a törvényt középiskolásaink Gay – Lussac második törvényeként ismerik. – *A szerk.*



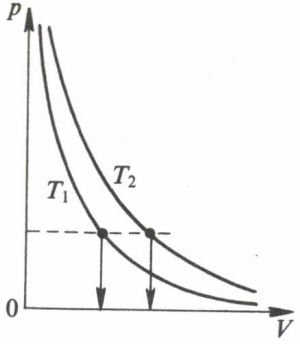
90. ábra

Első diák: Én viszont már most megakadtam. Nem egészen értem ugyanis, hogy például az izobár görbe a V—T koordináta-rendszerben miért lesz az origóból kiinduló egyenes?

Tanár: Nézze meg kérem az izobár folyamatot leíró (122) kifejezést! Világos, hogy azt egyszerűen a következő alakra hozhatjuk: $V = \text{konst} \cdot T$. Tehát egyértelmű, hogy a V térfogat a T hőmérséklettel egyenes arányban áll.

Első diák: Most már világos.

Tanár: A 91. ábrán azonos tömegű gáz két különböző (T_1 és T_2) hő-



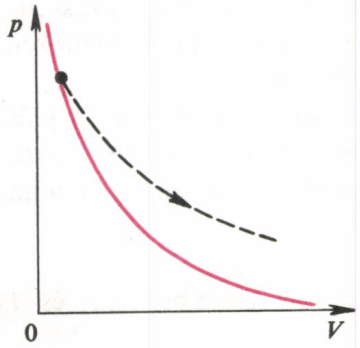
91. ábra

mérséklethez tartozó izotermáját mutatjuk be. Melyik görbéhez tartozik magasabb hőmérséklet?

Második diák: Úgy gondolom, hogy én tudom a választ. Vegyünk fel az ábrán egy izobár görbét (lásd szaggatott vonal a 91. ábrán)! Állandó nyomáson akkor nagyobb a gáz térfogata, ha a hőmérséklete is magasabb. Tehát a jobb oldali görbe (T_2) felel meg a magasabb hőmérsékletnek.

Tanár: Helyes a válasz. Jegyezzék meg kérem, minél közelebb áll egy izoterma a $p-V$ koordináta-rendszerben az origóhoz, annál alacsonyabb hőmérséklet tartozik hozzá. Ilyen értelemben tehát az origóhoz való közeledés minden esetben a gáz hőmérsékletének csökkenésével, míg a távolodás a hőmérséklet növelésével áll kapcsolatban.

Lássuk most a 92. ábrát! A rajzon a folytonos görbe egy izotermát ábrázol. A szaggatott vonallal ábrázolt kitáguláskor nő vagy csökken a gáz hőmérséklete?



92. ábra

Első diák: Ha a szaggatott vonal mentén haladunk, akkor távolodunk az origótól, tehát a hőmérséklet növekszik.

Tanár: Helyes. Most pedig válasszunk ki a p-V koordináta-rendszerben teljesen tetszőlegesen két pontot: az 1. pont paraméterei p_1, V_1, T_1, a 2. pont paraméterei pedig p_2, V_2, T_2. Hányféle átmenet lehetséges az 1. pontból a 2-ba, ha csak az izo-folyamatokat vesszük figyelembe?

Első diák: Szerintem három, mégpedig az izotermikus – izobár, az izotermikus – izochor és az izobár – izochor átmenet.

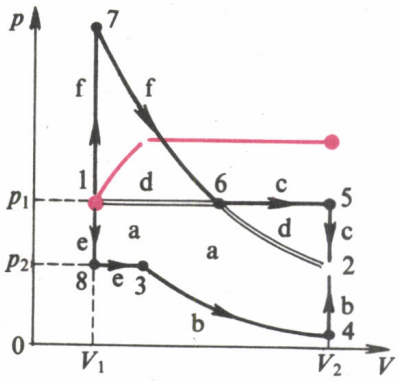
Tanár: És például az izobár – izotermikus átmenet kizárt?

Első diák: Vajon ez nem ugyanaz, mint az izotermikus – izobár átmenet? Az igazat megvallva, erre én még sohasem gondoltam.

Tanár: Ez két eltérő folyamat. Összesen hatféle átmenet lehetséges. Ezeket a 93. ábra mutatja: *a*) izoterm – izobár; *b*) izoterm – izochor; *c*) izobár – izochor; *d*) izobár – izoterm; *e*) izochor – izobár és *f*) izochor – izoterm átmenet. Könnyen beláthatjuk, hogy ezek teljesen eltérő átmenetek, hiszen egymástól különböző közbenső állapotok felelnek meg nekik

A 93. ábra kapcsán célszerű kiemelnünk két tényezőt: **Először, hogy tetszőleges kezdeti állapot és tetszőleges végállapot között az átmenet megvalósítható valamilyen két izo-folyamat segítségével (azaz a sík bármely két pontját összeköthetjük például egy izoterma és egy izobár görbe segítségével); másodszor pedig, mivel három izo-folyamattal rendelkezünk, két tetszőleges állapot között hat különféle átmenet lehetséges.**

Térjünk vissza most egy kicsit a (120) egyesített gáztörvényhez! Idézzük fel, hogyan tanulták ennek a törvénynek a levezetését!



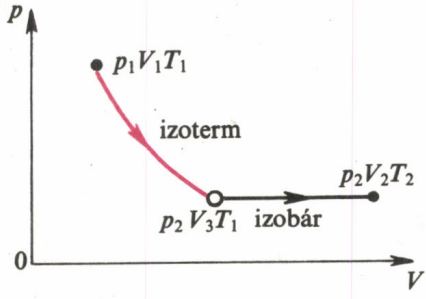
93. ábra

Első diák: A középiskolában az egyesített gáztörvényt a Boyle–Mariotte- és a Gay–Lussac-törvényekből kiindulva vezettük le. Csak mindig eltévesztem ezt a levezetést. Ezenkívül, most egy teljesen új levezetést tetszett mutatni az egyesített gáztörvényre a gázok állapotegyenletéből kiindulva.

Tanár: Ezért szeretném ezt a kérdést véglegesen tisztázni. Jegyezzék meg kérem, hogy a gázok (118) állapotegyenlete a kiindulási alap. Láttuk, hogy ezt a gázmolekulák mozgásának vizsgálata alapján kaptuk. Ezt követően a (118) állapotegyenletből kapjuk az egyesített gáztörvény legáltalánosabb (119) alakját, amikor a p_1, V_1, T_1, m_1 paraméterek mindegyike változó. A (119)-ből áttérhetünk a (120) egyenlettel kifejezett egyedi esetekre, és végül az izo-folyamatokra, amelyeket a (121) és (123) kifejezések írnak le. Ezt a módszert, amikor az általánostól haladunk az egyedi felé, deduktív eljárásnak nevezik. Létezik ezzel ellentétes módszer is – az úgynevezett induktív eljárás –, amikor az egyedi kifejezésekről térünk át az általánosra. Ebben az esetben feltételezik, hogy az egyedi esetre érvényes kifejezések előzetesen ismeretesek, pl. közvetlenül

a kísérletből kapjuk azokat. Az egyedi kifejezések alapján, azok általánosításával lehet megkísérelni az általános érvényű kifejezés levezetését. A deduktív eljárás következetesebb és egyben logikusabb, ugyanakkor az induktív eljárás gyakran egyszerűbbnek adódhat.

Az induktív eljárással a Boyle–Mariotte- és a Gay–Lussac-törvényekből kell kiindulnunk. Az egyesített gáztörvény levezetését arra a már ismert megállapításra alapozzuk, amely szerint bármely kezdeti (p_1, V_1, T_1) állapotról tetszőleges (p_2, V_2, T_2) állapotba az átmenet megvalósítható egy izoterm és egy izobár görbe segítségével. A 94. ábrán ezt az állapotváltozást a $p-V$ koordináta-



94. ábra

rendszerben ábrázoltuk. A közbenső állapot paraméterei: $p_2V_3T_1$. A kezdeti és közbenső állapot paraméterei között a Boyle–Mariotte-törvény segítségével teremthetünk összefüggést:

$$p_1V_1 = p_2V_3. \tag{124}$$

A Gay–Lussac-törvény alapján pedig a közbenső és a végállapot paraméterei között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\frac{V_3}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \tag{125}$$

Figyeljük meg, hogy a (124) és (125) egyenletekben szerepel egy közös tag, a V_3 közbenső térfogat. Ennek kiejtésével kapjuk a végső eredményt:

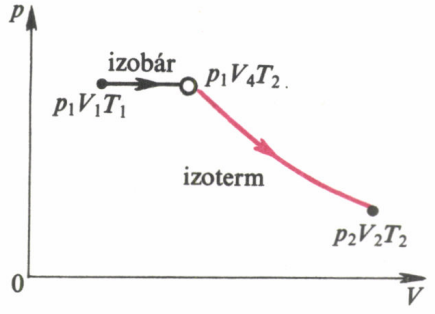
$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

Második diák: És mi történik akkor, ha az első szakaszunk lesz egy izobár, utána pedig az izoterm görbe?

Tanár: Akkor a 95. ábrán bemutatott állapotváltozási jelleggörbével fogunk rendelkezni. A kezdeti állapot paraméterei: p_1, V_1, T_1, a végállapoté p_2, V_2, T_2, a közbenső állapoté pedig (ott mindig nagyon figyelmesnek kell lenni!): p_1, V_4, T_2.

Első diák: Miért változott meg most a közbenső állapot a korábbihoz képest?

Tanár: A kezdeti és közbenső állapotot most Gay–Lussac-törvénye köti össze, azaz $V_1/T_1 = V_4/T_2$, míg a közbenső és végállapot között a Boyle–Mariotte-törvény érvényesül. Tehát: $p_1V_4 = p_2V_2$. A közös V_4 paraméter kiejtésével ismét a (120) egyenletet kapjuk eredményül.



95. ábra

Második diák: Ezek szerint bizonyára ugyanezt kapjuk egy izoterm és izochor, illetve izobár és izochor görbe segítségével is.

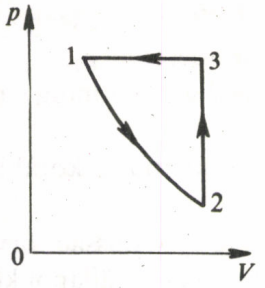
Tanár: Természetesen. A különbség csak annyi, hogy minden alkalommal másként fog festeni az állapotváltozás görbéje a $p-V$ koordináta-rendszerben, és más lesz a közbenső állapot, a végeredmény azonban minden esetben ugyanaz.

Első diák: Ez azt jelenti, hogy ha az izo-folyamatokból indulunk ki, akkor az egyesített gáztörvényt hatféleképpen vezethetjük le?

Tanár: Pontosan. Ez a megállapítás egyenes következménye a 93. ábrán bemutatott folyamatoknak.

Első diák: A $p-V$ koordináta-rendszerben felrajzolt grafikonok alapján most már tökéletesen megértettem az egyesített gáztörvényt.

Tanár: Vizsgáljunk meg most egy olyan ciklikus (azaz zárt) folyamatot, amelyet három különféle izo-folyamat alkot. Legyen a folyamatunk a 96. ábrán a $p-V$ koordináta-rendszerben felrajzolt! Itt az $1 \rightarrow 2$ átmenet izotermikus tágulás, a $2 \rightarrow 3$ izochor melegedés, a $3 \rightarrow 1$ pedig izobár összenyomás...

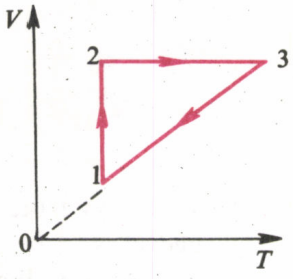


96. ábra

Második diák: (közbevág) Ugye, a $3 \rightarrow 1$ átmenetet nevezhetnénk „izobár hűtés"-nek is?

Tanár: Igen, mert hiszen a 3. ponttól az 1. felé haladva a gáz hőmérséklete csökken. Most pedig a kérdésem a következő: hogyan néz ki ez a ciklikus folyamat a $V-T$ koordináta-rendszerben?

Második diák: A 97. ábrán bemutatott módon fog festeni.



97. ábra

Tanár: Helyes. Látom, hogy jól megértette az izo-folyamatok grafikus ábrázolását. Akkor hát menjünk tovább, és lássunk egy olyan konkrét folyamatot, amelyben már nem két paraméter változik (mint az izo-folyamatoknál), hanem három. Tételezzük fel, hogy a gázunk oly módon tágul, hogy annak nyomását és térfogatát a $pV^2 = \text{konst.}$ kifejezés szabja meg! Ismeretes, hogy a térfogat kétszeresére nőtt. Hogyan változik ekkor a hőmérséklete? Mivel kell általában kezdenünk a megoldást, ha egy gázban végbemenő folyamatot vizsgálunk?

Második diák: Bizonyára meg kell jelölnünk a kezdeti és végső állapot paramétereit. Legyenek ezek: p_1, V_1, T_1, illetve p_2, V_2, T_2!

Tanár: Milyen kapcsolat áll fenn ezen paraméterek között általános esetben?

Második diák: Igen, értem a kérdést. Ez a kapcsolat számunkra jól ismeretes:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} .$$

Tanár: Ha izotermikus lenne a folyamatunk, akkor milyen kiegészítő feltételt kellene szabnunk?

Második diák: A $T_1 = T_2$ feltételt.

Tanár: Tehát a következő egyenletrendszerünk lenne:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} ,$$

$$T_1 = T_2.$$

Innen közvetlenül a Boyle–Mariotte-törvényt kapnánk: $p_1 V_1 = p_2 V_2$. A mi esetünkben azonban a folyamat nem izotermikus, tehát más lesz a kiegészítő feltételünk is. Hogyan írható ez fel?

Második diák: Ezt a feltételt a feladat szövege tartalmazza:

$$p_1 V_1^2 = p_2 V_2^2.$$

Tehát a következő egyenletrendszerünk van:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} ,$$

$$p_1 V_1^2 = p_2 V_2^2.$$

A két egyenletet elosztva egymással kapjuk:

$$V_1 T_1 = V_2 T_2.$$

Ebből következik, hogy a gáz hőmérsékletének ugyanolyan mértékben kell csökkennie, mint amilyen mértékben nő a térfogata.

Tanár: Végül vitassuk meg, hogyan kell kiszámítani a (118) egyenletben szereplő R univerzális gázállandó értékét! Kétlem ugyanis, hogy célszerű lenne a számértéket állandóan fejben tartani.

Első diák: A (117) kifejezést kell erre felhasználni. Az Avogadro-szám értéke: $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ mól^{-1}, a Boltzmann-állandó: $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/°K. Tehát:

$$R = N_A k = 8{,}3 \text{ J/mól} \cdot \text{°K}.$$

Második diák: Szerintem folyamodhatunk az egyesített gáztörvényhez is:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}, \tag{126}$$

ahol a p_0, V_0, T_0 paraméterek egy adott tömegű, normál állapotú gázra vonatkoznak, azaz $p_0 \approx 10^3$ Pa, $T_0 = 273$ °K, $V_0 = (m/\mu)22{,}4 \cdot 10^{-3}$ m^3 (ismeretes, hogy bármely gáz 1 mólnyi mennyisége normál állapotban 22,4 l térfogatot tölt ki, az m/μ hányados természetesen az adott tömegű gázban levő mólszámot fejezi ki). Behelyettesítve ezeket az értékeket a (126)-ba és a (118)-cal egybevetve, megkapjuk, hogy

$R = 8{,}3$ J/°K.

Tanár: Mindkét végeredmény pontos. Az utóbbi megoldás során azonban a $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ m^3 helyett, $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ m^3/mólt kell írni.

23. HOGYAN OLDJUNK MEG PÉLDÁKAT A GÁZTÖRVÉNYEKKEL?

Első diák: Szeretném, ha közösen megoldanánk néhány olyan példát, amelyben a gáztörvényeket kell alkalmazni.

Tanár: Rendben van, bár megjegyzem, hogy szerintem a felvételi feladatoknak ez a csoportja meglehetősen egyszerű. A legtöbb közülük az alábbi két csoport valamelyikéhez sorolható:

Első csoport: **a feladat egy adott gáztömeg állapotváltozásának vizsgálata, miközben magát a gáz tömegét nem kell figyelembe venni. A kitágulás, felmelegítés vagy egyéb folyamatok során a gáz a p_1, V_1, T_1 paraméterekkel jellemzett állapotból a p_2, V_2, T_2 állapotba megy át.**

A kezdeti és végállapot paraméterei az egyesített gáztörvény segítségével hozhatók egymással kapcsolatba:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

A kérdés mindig ezen hat paraméter egyikének kiszámítása.

Második csoport: **a gáz állapota nem változik, viszont figyelembe kell venni annak a tömegét. A kérdés vagy a gáz tömegének kiszámítása az ismert paraméterek alapján, vagy pedig egy adott állapot valamelyik paraméterének meghatározása a gáz ismert tömege és többi paramétere alapján.**

Ezeknél a feladatoknál szükség van a vizsgált gáz molekulatömegének ismeretére.

Második diák: A második csoporthoz tartozó feladatok megoldása során legcélszerűbb a (118) egyenlethez folyamodni.

Tanár: Természetesen felhasználható ez az egyenlet is. Ehhez azonban feltétlenül emlékezni kell az R univerzális gázállandó számértékére. Erre viszont rendszerint senki sem emlékszik. Ezért a gyakorlat-

ban célszerűbb a következő fogást alkalmazni: gondolatban normál állapotra hozzuk a gázt és p_0, V_0, T_0-val jelölve az ehhez tartozó paramétereket, felhasználhatjuk a (126) egyenletet:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0},$$

ahol:

$$V_0 = \frac{m}{\mu} \cdot 22{,}41 \text{ l}.$$

Második diák: Én úgy gondolom, hogy ez a megoldási mód nem egyszerűbb, mint a (118) egyenlet segítségével. Itt ugyanis nem egy, hanem három állandó számértékét kell fejből tudni: a $p_0 = 760$ Hgmm, $T_0 = 273$ °K és $V_0/(m/\mu) = 22{,}4$ l mennyiségeket. Szerintem egyszerűbb egyedül az univerzális gázállandó értékét megjegyezni.

Tanár: Mégis egyszerűbb az általam javasolt megoldás, mert a kérdéses nyomást, hőmérsékletet és az 1 mól gáz normál állapotban mért térfogatát mindenki kívülről tudja. Tegyük fel, hogy 58 g, 8 atm. nyomású és 91 °C-os levegő térfogatát kell kiszámítanunk. Végezzük a megoldást az általam javasolt módszerrel! Mivel a levegő 1 móljának tömege 29 g, tehát 2 mólnyi mennyiség áll rendelkezésünkre. Normál állapotban ez 44,8 l térfogatú lesz. A (120) alapján felírhatjuk:

$$V = V_0 \frac{p_0 T}{p T_0} = 44{,}8 \text{ (l)} \cdot \frac{1 \cdot 364}{8 \cdot 273} = 7{,}5 \text{ l}.$$

Második diák: Úgy látom, hogy $p_0 = 1$ atm értéket tetszett behelyettesíteni, holott a feladatban technikai atmoszféra szerepelt. Ennek alapján bizonyára $p_0 = 1{,}033$ atm értéket kellett volna behelyettesíteni.

Tanár: Igaza van. A fizikai és technikai atmoszféra (amely normál nyomásnak felel meg) értéke között eltérés van. Jelen esetben ezt én valóban elhanyagoltam.

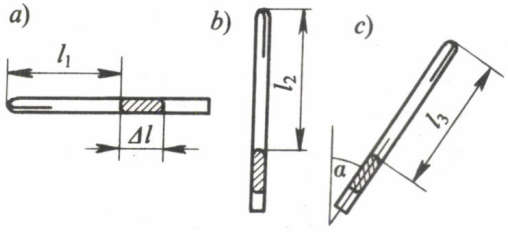
Első diák: Tanár Úr kérem! Legyen szíves rámutatni azokra a jellegzetes hibákra, amelyekkel az első, illetve a második csoporthoz tartozó feladatok megoldásakor találkozhatunk!

Tanár: Már említettem, hogy szerintem ezek a feladatok eléggé egyszerűek.

Első diák: Mégis, mit szoktak a felvételizők elrontani?

Tanár: Ha a figyelmetlenséget most nem tekintjük, akkor a **fő hibaforrásnak azt kell tekintenünk, hogy egyik vagy másik konkrét állapotban nem tudják kiszámítani a gáz nyomását.** Nézzünk meg egy, az egyik végén leforrasztott üvegcsővel kapcsolatos példát.

Az üvegcső egy részét higany tölti ki, amely az üvegcső belsejében levő levegőt elzárja az atmoszférától. A cső a függőleges síkban elmozdulhat. Az *a)* helyzetben (98. ábra) a levegőoszlop hossza a csőben l_1, a *b)* helyzetben pedig l_2. Számítsuk ki a harmadik helyzetben (98. *c*) ábra) a levegőoszlop l_3 hosszát, ha a cső a függőlegessel α szöget zár be.



98. ábra

Jelöljük p_a-val az atmoszféra nyomását Hgmm-ben, Δl-lel pedig a higanyoszlop hosszát a csőben (mm). Az első helyzetben világos, hogy a levegő nyomása a csőben egyenlő a p_a atmoszferikus nyomással. A második helyzetben a csőben levő levegő nyomása $(p_a - \Delta l)$, mivel ebben az esetben az atmoszféra nyomását a levegőben levő higany és levegőoszlop együttes nyomása egyenlíti ki. A Boyle – Mariotte-törvény alapján írhatjuk:

$$l_1 p_a = l_2(p_a - \Delta l).$$

Innen az atmoszferikus nyomás értékére kapjuk:

$$p_a = \frac{\Delta l \cdot l_2}{l_2 - l_1}. \qquad (127)$$

A harmadik helyzetben a higanyoszlop súlyának egy részét a cső falának reakcióereje egyenlíti ki. Ennek eredményeként a csőben uralkodó légnyomás értéke $(p_a - \Delta l \cdot \cos\alpha)$ lesz. Az első és harmadik állapotra alkalmazva a Boyle – Mariotte-törvényt, felírhatjuk:

$$l_1 p_a = l_3(p_a - \Delta l \cdot \cos\alpha).$$

Ebből az atmoszferikus nyomás értéke:

$$p_a = \frac{\Delta l \cdot l_3 \cos \alpha}{l_3 - l_1} . \tag{128}$$

A (127) és (128) kifejezések jobb oldalait egyenlővé téve kapjuk:

$$\frac{l_2}{l_2 - l_1} = \frac{l_3 \cos \alpha}{l_3 - l_1} .$$

Ebből pedig a keresett hossz:

$$l_3 = \frac{l_1 l_2}{l_2 - (l_2 - l_1) \cos \alpha} .$$

Az eredményből rögtön látszik, hogy ha $\cos \alpha = 1$, akkor $l_3 = l_2$, azaz a cső a második helyzetben van, viszont ha $\cos \alpha = 0$, akkor $l_3 = l_1$, vagyis a cső az első helyzetben található.

Első diák: Külön-külön én értem a Tanár Úr által említett első és második csoporthoz tartozó példákat. A felvételi vizsgán azonban bizonyára olyan feladatokat is kapunk, amelyek a két csoport kombinációjaként foghatók fel.

Tanár: **Bizony, ez nincs kizárva. Lássunk egy ilyen példát! Hogyan változik meg 16 g oxigén hőmérséklete, ha a nyomását 2 atm-ról 5 atm-ra növeljük, és ugyanakkor a térfogatát 5 literről 1 l-re csökkentjük?**

Első diák: Az oxigén tömegének, nyomásának és térfogatának ismeretében rögtön kiszámítható a hőmérséklete. 16 g oxigén = 0,5 mól, azaz a térfogata 11,2 l normál állapotban. Tehát a hőmérséklet:

$$T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = 273 \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 11{,}2} = 244 \text{ °K}. \tag{129}$$

Tanár: Helyes. A feladat eddigi megoldását a második csoport tipikus példájaként tekinthetjük.

Első diák: A gáz kezdeti állapotához tartozó T_1 hőmérséklet ismeretében kiszámítom a végállapot T_2 hőmérsékletét:

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 244 \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 5} = 488 \text{ °K}.$$

Kivonva ebből a (129) egyenlet eredményét, azt kapjuk, hogy az oxigén hőmérséklete 244 °K-kal nőtt meg.

Tanár: A megoldás tökéletes. Látják: a megoldás második szakasza már egyértelműen az első csoporthoz sorolható.

Második diák: A feladatok lehetséges csoportosításáról beszélve, mindjárt az elején tetszett említeni, hogy a legtöbb feladat ehhez a két csoporthoz sorolható. Léteznek olyan feladatok is, amelyek elvileg is eltérnek az első vagy a második csoporttól?

Tanár: Igen, léteznek. Az említett csoportoknál a gáz tömegét állandónak tételeztük fel.

Vannak azonban olyan feladatok is, amelyekben a gáz tömege megváltozik (elveszünk belőle vagy hozzáadunk).

A hasonló típusú feladatokat soroljuk feltételesen egy harmadik csoportba! Ezekre a feladatokra nem adhatunk megoldási receptet, mindegyiket egyedileg kell megvizsgálni. A harmadik csoporthoz tartozó feladatok azonban minden konkrét esetben visszavezethetők az első vagy a második csoportra, illetve a kettő kombinációjára. A nehézség persze abban rejlik, hogyan tudjuk a visszaszármaztatást elvégezni. Javaslom, hogy nézzünk meg erre két példát.

Első példa: Egy edényben levő gáz nyomása 20 atm, hőmérséklete 27 °C. Számítsuk ki a gáz nyomását, ha annak felét kiengedtük az edényből, hőmérsékletét pedig 50 °C-kal megemeltük!

Ez a feladat az első csoporthoz hasonló, mivel a gáz állapota megváltozik. Az állapottal együtt azonban megváltozik a gáz tömege is. Az egyesített gáztörvényt akkor alkalmazhatjuk, ha egyazon tömegű gáz állapotváltozását vizsgáljuk. Válasszuk ki erre a célra azt a gázmennyiséget, amely a végső állapotban is az edényben marad. Jelöljük a végállapot paramétereit p_2, V_2, T_2-vel. Itt $T_2 = (263+27+50)\,°\mathrm{K} = 350\,°\mathrm{K}$; $V_2 = V$, azaz az edény térfogata, p_2 pedig a keresett érték.

Hogyan fejezhetnénk ki ennek a gáztömegnek a kezdeti paramétereit?

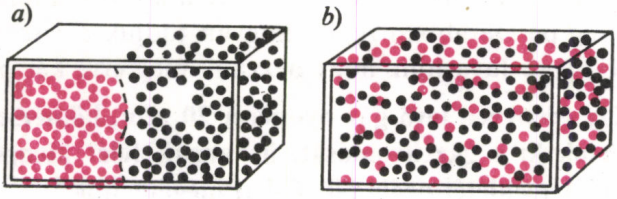
Első diák: A gáz ezen hányadának hőmérséklete a kezdeti állapotban megegyezik az edényben levő összes gáz hőmérsékletével, tehát $T_1 = (273+27)\,°\mathrm{K} = 300\,°\mathrm{K}$; a V_1 térfogat egyenlő az edény térfogatának felével: $V/2$-vel; nyomása szintén megegyező: $p_1 = 20$ atm.

Második diák: Én másként határoznám meg az adott tömegű gáz kezdeti paramétereit, nevezetesen: $T_1 = 300\,°\mathrm{K}$; térfogata megegyezik az

össz gázmennyiség teljes térfogatával ($V_1 = V$), a nyomás viszont csupán fele az össze gázmennyiség nyomásának: $p_1 = 10$ atm.

Tanár: Mivel a nyomás és a térfogat szorzataként szerepelnek az egyenletben, ezért a két javasolt megoldás, annak ellenére, hogy eltér egymástól, azonos eredményre vezet. Ezért nem is kellene figyelmet fordítanunk erre az eltérésre, ha a fizikai értelmezésük nem lenne érdekes. Állapodjunk meg, hogy azokat a gázmolekulákat, amelyek mindvégig az edényben maradnak, „vörös" molekuláknak nevezzük, azokat pedig, amelyeket közben kibocsátunk, „feketéknek". Tehát a bennmaradó molekulák vörösek, a távozók feketék. A gáz kezdeti állapotát kétféleképpen magyarázhatjuk:

1. A vörös és fekete molekulák annyira szétváltak az edényben, hogy abban kiválaszthatunk olyan makroszkopikus térfogatokat, amelyeket vagy csak vörös, vagy csak fekete molekulák töltenek ki (99. *a)* ábra);



99. ábra

2. A vörös és fekete molekulák annyira elkeveredtek, hogy az edény tetszőlegesen kiválasztott makroszkopikus térfogatában gyakorlatilag mindkét fajta molekula azonos számban van jelen (99. *b)* ábra). Az első esetben mindkét molekulafféleség $V/2$ térfogatú, önálló gáznemű „testet" alkot, amely az edény falára és a másik „testtel" alkotott képzeletbeli határvonalra egyaránt 20 atm nyomással hat. A második esetben mindkét molekulafféleség egyenletesen oszlik el az edény teljes V térfogatában, és az edény falára gyakorolt nyomáshoz mindkettő fele arányban járul hozzá (az edény falának bármely pontjában az ütközések fele a vörös, fele pedig a fekete molekulákra esik). Ebben az esetben $V_1 = V$, $p_1 = 10$ atm. Ez utóbbi megjegyzéssel kapcsolatban emlékeztetem Önöket a parciális nyomások összegezésének elvére, azaz hogy a gázelegyek nyomása egyenlő az elegy egyes komponensei nyomásá-

nak összegével. Hangsúlyozom, hogy gázelegyekről van szó, azaz a különféle molekulák egymás között el vannak keveredve.

Második diák: A második elképzelés helyesebb, mert hiszen a kétfajta molekulák valóban el vannak keveredve.

Tanár: Ennél a példánál mindkét elképzelés teljesen egyenértékű. Ne feledjük, hogy a molekulák apriorisztikus felosztását két csoportra csupán feltételesen hajtottuk végre!

Térjünk vissza a feladat megoldásához! Írjuk fel az egyesített gáztörvényt arra a gáztömegre, amely az edényben marad:

$$\frac{10V}{300} = \frac{p_2 V}{350}.$$

Ebből: $p_2 = 11{,}7$ atm $\approx 11{,}9 \cdot 10^3$ Pa.

Lássunk egy másik példát!

Egy V térfogatú edényben p_0 nyomáson levő gázt egy v hengerűrtartalmú szivattyúval leszívatjuk. Számítsuk ki, hány n löketre van szükség ahhoz, hogy a gáz nyomása az edényben p_n értékre csökkenjen!

Első diák: Szerintem ez a feladat igen egyszerűen megoldható: az n löket eredményeként a gáz térfogata n-szer v értékkel megnő. Tehát a Boyle–Mariotte-törvény a következő alakban írható fel:

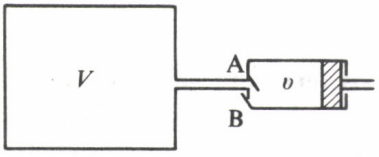
$$p_0 V = p_n(V + nv).$$

Innen pedig egyszerűen számítható n értéke.

Tanár: Melyik gázmennyiségre vonatkozik a felírt egyenlet?

Első diák: Arra, amelyik eredetileg volt az edényben.

Tanár: Viszont ennek a gázmennyiségnek egy része már az első löket befejeztével eltávozik a rendszerből, ugyanis abban a pillanatban, amint a dugattyú jobbról balra megindul, az A szelep zár, a B viszont nyit és ezen keresztül a gáz elhagyja a rendszert (lásd 100. ábra!). Úgy is mondhatnám, hogy a gáz térfogatának az említett $n \cdot v$ értékű növekedése nem egy és ugyanazon tömegre vonatkozik. Ezért az egyenlete sem helyes.



100. ábra

Az edényben eredetileg található gázmennyiségre felírhatjuk:

$$p_0 V = p_n(V+nv).$$

ahol: p_1 = a gáz nyomása abban az állapotban, amikor a dugattyú a jobb oldali végkitérésbe kerül. Ezután a dugattyú balra kezd mozogni, de közben az A szelep zár, és végül az edényben az eredeti mennyiségnél kevesebb gáz marad. Ennek a visszamaradó résznek is p_1 lesz a nyomása. Erre a mennyiségre a dugattyú következő lökete alapján írható:

$$p_1 V = p_2(V+v),$$

ha p_2 = a jobb oldali végkitéréskor mért nyomás. A további harmadik, negyedik stb. löketek alapján n számú egyenletrendszerhez jutunk, amelyek mind a Boyle–Mariotte-törvényt fejezik ki:

$$\begin{aligned} p_0 V &= p_1(V+v), \\ p_1 V &= p_2(V+v), \\ p_2 V &= p_3(V+v), \\ &\vdots \\ p_{n-1} &= p_n(V+v). \end{aligned} \qquad (130)$$

Valamennyi egyenlet egy adott gázmennyiségre vonatkozik. A (130) egyenletrendszer megoldásaként a

$$p_n = p_0\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$$

illetve logaritmálás után az

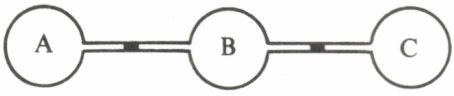
$$n = \frac{\lg \dfrac{p_n}{p_0}}{\lg \dfrac{V}{V+v}}$$

kifejezést kapjuk.

Végül nézzünk meg még egy példát!

A 101. ábrán az A, B és C azonos térfogatú gömbszerű edényeket csővel összekötöttük. Mindkét csőben higanycsepp található, amely a kezdeti állapotban, amikor a hőmérséklet T_1, a középső helyzetben

van. Az egyes gömbtérfogatok értéke a higanycseppig mért csővezetékkel együtt V_1. Mennyire mozdulnak el a higanycseppek, ha a B gömb hőmérsékletét ΔT, a C gömbét pedig $2\Delta T$ értékkel megnöveljük? A cső keresztmetszete legyen S, a hőmérséklet-emelkedés pedig $\Delta T \ll T_1$.



101. ábra

Előrebocsátom, hogy mivel a gáz hőmérséklete és térfogata igen kis értékkel változik, a $\Delta T \cdot \Delta V$ szorzatot a megoldás során előforduló összes kifejezésben elhanyagolhatjuk, mint minden határon túl nullához közelítő értéket.

Első diák: Én nem tudnám megoldani ezt a példát. Számomra túl bonyolultnak tűnik.

Tanár: Itt a gáz tömege nem változik, azonban egyszerre többféle gázmennyiséggel van dolgunk, és a megoldás során gondosan ügyelni kell arra, hogy melyik gázmennyiségre vonatkozik az összefüggésünk. Ezenkívül igen alaposan meg kell gondolnunk, hogy mindhárom gázmennyiség esetében melyik a kezdeti, illetve a végállapot. Jelöljük a tömegeket m_A, m_B és m_C-vel. Feltételezzük, hogy m_A gázmennyiség térfogata a B gömb melegítése következtében ΔV_1 értékkel csökken, ugyanakkor a C gömb melegítésekor az m_C gázmennyiség térfogata ΔV_2 értékkel növekszik, tehát az m_B gáz térfogata $\Delta V_1 - \Delta V_2$ értékkel nő.

A kiindulási adatok és a fenti megjegyzések alapján leszögezhetjük:

a) az m_A gázmennyiség paraméterei:
– kezdeti állapotban: p_1, V_1, T_1,
– végállapotban: p_2, $V_1 - \Delta V_1$, T_1.

Ebből:
$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2(V_1 - \Delta V_1)}{T_1}; \tag{131}$$

b) az m_B gázmennyiség paraméterei:
– a kezdeti állapotban: p_1, V_1, T_1,
– a végállapotban: p_2, $V_1 + \Delta V_1 - \Delta V_2$, $T_1 + \Delta T$

Ebből:
$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2(V_1 + \Delta V_1 - \Delta V_2)}{T_1 + \Delta T}; \tag{132}$$

c) az m_C gázmennyiség paraméterei:
– a kezdeti állapotban: p_1, V_1, T_1
– a végállapotban p_2, $V_1+\Delta V_2$, $T_1+2\Delta T$.
Ebből:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2(V_1+\Delta V_2)}{T_1+2\Delta T}. \tag{133}$$

A (131) és (132) alapján felírható:

$$(V_1-\Delta V_1)(T_1+\Delta T) = (V_1+\Delta V_1-\Delta V_2)T_1,$$

a (132) és (133) alapján pedig:

$$(V_1+\Delta V_1-\Delta V_2)(T_1+2\Delta T) = (V_1+\Delta V_2)(T_1+\Delta T).$$

A kijelölt műveletek elvégzése és a $\Delta V\,\Delta T$ tagok elhagyása után a következő egyenleteket kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} 2\Delta V_1 T_1 &= V_1\Delta T+\Delta V_2 T_1,\\ 2\Delta V_2 T_1 &= V_1\Delta T+\Delta V_1 T_1 \end{aligned}\right\}$$

Innen az eredmény:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = V_1\cdot\frac{\Delta T}{T_1}, \text{ illetve } \Delta l = V_1\frac{\Delta T}{ST_1}.$$

Tehát mindkét higanycsepp Δl szakaszon mozdul el balra a fenti értékkel, a B gömbben levő gáz térfogata pedig változatlan marad.

Első diák: Valóban, teljesen logikus és érthető a megoldás.

Tanár: Egy dologot kell jól megjegyezni: egy adott gázmennyiség vizsgálatakor ügyeljünk, hogy ennek a gáznak a kezdeti és végső paramétereit vegyük számításba, ne pedig egy ettől eltérőt. Egyébként valóban nincs az egészben semmi nehézség.

Feladatok:

77. Egy egyik végén leforrasztott üvegcsövet egy edényben levő higany szintjéig nyomunk le a folyadékba függőlegesen (102. ábra). Ekkor a csőben a levegő által kitöltött rész magassága $h_1 = 10$ cm. Mekkora h_2 magasságra kell a cső végét a higany fölé emelni, hogy a csőben és az edényben a higany szintje kiegyenlítődjék? Az atmoszféra nyomását vegyük normál értékűnek

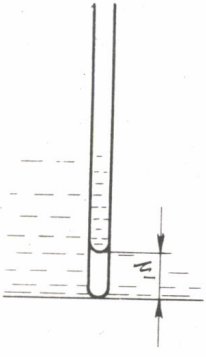
($p_0 = 760$ Hgmm). Számítsuk ki a csőben levő levegő m tömegét, ha a cső keresztmetszete $S = 1$ cm^3! A hőmérséklet legyen $t =$ $= 27$ °C.

78. Az egyik végén leforrasztott üvegcsövet szabad végével lefelé egy edényben levő higanyba helyeznünk (103. ábra). Hogyan változik meg a higany szintje a csőben, ha a hőmérséklet a kezdeti $t_1 = 20$ °C-ról $t_2 = 77$ °C-ra nő? Ismert, hogy $l_1 = 10$ cm, $l_2 =$ $= 30$ cm és az atmoszféra nyomása normál értékű. A cső hőtágulását elhanyagolhatjuk. Számítsuk ki a csőben levő levegő m tömegét, ha a cső keresztmetszete $S = 0{,}5$ cm^2!

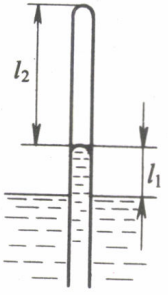
79. Egy $V = 5$ l térfogatú edényben $t = 27$ °C-os, $p_1 = 20$ atm nyomású levegő található. Mekkora Δm tömegű levegőt kell az edényből kibocsátanunk, hogy abban a nyomás $p_2 = 10$ atm legyen?

80. Számítsuk ki, mekkora W munkát végez a $t_1 = 20$ °C-ról $t_2 = 100$ °C-ra történő izobár melegítésekor a zárt hengerben levő gáz, ha a dugattyú felülete $S = 20$ cm^2, tömege pedig $M =$ $= 5$ kg! Két esetet vizsgáljunk (lásd 104. *a)* és *b)* ábra): *a)* vízszintes, illetve *b)* függőleges helyzetben. A gáz kezdeti térfogata $V_1 = 5$ l, az atmoszferikus nyomás pedig normális.

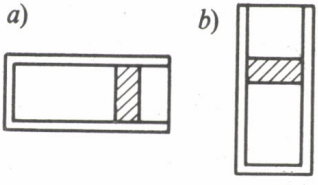
81. Egy $S = 0{,}5$ cm^2 keresztmetszetű, felső végén leforrasztott, függőleges helyzetű üvegcsőben $l_1 = 40$ cm szakaszt levegőoszlop foglal el, amelyet alsó végén egy $h = 8$ cm magasságú higanyoszlop zár. A hőmérséklet: $t_1 = 27$ °C. Mekkora Δl értékkel változik meg a légoszlop magassága, ha a csövet a függőlegestől $\alpha = 60°$-os szögben kitérítjük és egyben a hőmérsékletét $\Delta T =$



102. ábra



103. ábra



104. ábra

$= 30\ °K$ értékkel megnöveljük? Az atmoszféra nyomása normális. Számítsuk ki a csőben levő levegő m tömegét!

82. Két azonos térfogatú A és B gömbszerű edényt vékony csővel kötünk össze (105. ábra). T_1 hőmérsékleten a cső középen helyezkedik el egy higanycsepp. A higany által elválasztott mindkét térfogat egyenlő V_1-gyel. Mekkora Δl távolságra mozdul el a csőben a higany, ha az A gömb hőmérsékletét ΔT_1-gyel megnöveljük, ugyanakkor pedig a B gömböt ΔT_2-vel lehűtjük (ha $\Delta T_1 \ll T_1$ és $\Delta T_2 \ll T_1$)? Az összekötő cső keresztmetszete S. Három esetet vizsgáljunk meg, ha: *a)* $\Delta T_1 > \Delta T_2$; *b)* $\Delta T_1 < \Delta T_2$; és *c)* $\Delta T_1 = \Delta T_2$.

105. ábra

83. A feltételek most azonosak, mint a fejezetben szereplő, a 101. ábrával kapcsolatos példában voltak. Vizsgáljuk meg azt az esetet, ha a B gömb hőmérsékletét ΔT-vel megnöveljük, az A és C gömböket pedig ΔT-vel lehűtjük!

84. A feltételek itt is azonosak az előzővel. Vizsgáljuk meg azt az esetet, ha az A gömb hőmérsékletét ΔT-vel megnöveljük, a C gömböt pedig ΔT-vel lehűtjük!

85. Mekkora tömegű vízgőz található egy $V = 105\ cm^3$ térfogatú szobában, ha $t_1 = 15\ °C$-on a relatív páratartalom értéke 55%? Lesz-e harmatkiválás, ha a hőmérsékletet $t_2 = 10\ °C$-ra csökkentjük? A vízgőz a szobában található levegő össztömegének mekkora k hányadát teszi ki, ha a levegő nyomása $p = 760$ Hgmm?

24. MI A TERMODINAMIKA?

Második diák: Én már többször hallottam a „termodinamika" kifejezést, de nem tudom pontosan, hogy mit is jelent ez.

Tanár: **A termodinamika a fizikának az a fejezete, amely a legáltalánosabban (a molekuláris módszereket nélkülözve) tanulmányozza a vizsgált tárgy és a környezet között végbemenő energiaátadást.**

Első diák: A gáztörvények tanulmányozásakor mennyire kell ismerni a termodinamikát?

Tanár: Ez rögtön világos lesz, ha alább röviden megismerkedünk az ideális gáz termodinamikájának elméletével. Előrebocsátom, hogy a gáztörvények többé-kevésbé alapos ismerete elképzelhetetlen a termodinamika nélkül. Például a termodinamika megmondja nekünk, hogy energetikai szempontból miben különbözik egymástól az izotermikus tágulás és az izobár tágulás.

Kezdjük azzal a korábbról már ismert ténnyel, hogy az ideális gáz U belső energiája annak m tömegével és a T hőmérséklettel arányos

$$U = \frac{3m}{2\mu} RT. \tag{134}$$

Ez az eredmény a (112) és (117) kifejezésekből következik. **Ha egy gáz tömege változatlan, akkor a belső energiája kétféle folyamat következtében változhat meg: *a)* ha W munkavégzés megy végbe. Ekkor a gáz térfogatának meg kell változnia (kitáguláskor a gáz közöl munkát a környezetével, pl. elmozdítja a dugattyút, sűrítéskor viszont a környezet végez munkát); *b)* ha Q hőátadás történik (vagy a gáztól a környezetnek, vagy pedig fordítva).**

Tehát a gáz belső energiájának megváltozását a következő kifejezéssel adhatjuk meg:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \pm W \pm Q. \tag{135}$$

A kifejezésben a „+" előjel arra az esetre vonatkozik, ha a gáz vesz fel energiát (azaz az energia a megfelelő „csatornán" keresztül a környezetből a gázba jut), a „−" jel viszont azt jelenti, hogy a gáz közöl a környezettel energiát.

Második diák: Nem a (135) egyenletet szokták a termodinamika első főtételének nevezni?

Tanár: De igen, **ez a termodinamika első főtétele.** Megjegyzem, hogy **ez gyakorlatilag az energiamegmaradás törvényét fejezi ki, nevezetesen, hogy a gáz energiaváltozását a munka- és energiaátadás okozza.**

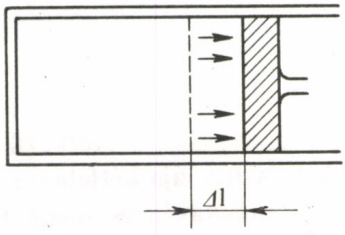
Második diák: Tehát, ha a gáz nem tágul és nem is nyomódik össze (azaz izochor folyamattal van dolgunk), akkor az energiaátadás a gáz és környezete között csakis hőátadással történhet?

Tanár: Igen, így van.

Első diák: És a gáz kezdeti és végállapotának paraméterei ismeretében kiszámítható a közölt munka, illetve a hőátadás?

Tanár: Igen. Vizsgáljuk például elsőként az izobár tágulást! Ebben az esetben különösen egyszerűen számítható az a munka, amelyet az adott gáz a környezettel közöl. Tegyük fel, hogy a gáz egy dugattyús hengerben $p = \text{konst.}$ nyomáson a V_1 térfogatról a V_2 térfogatra tágul ki. Közben az S keresztmetszetű hengert Δl távolságra mozdítja el (106. ábra). A dugattyú elmozdulására fordított munka:

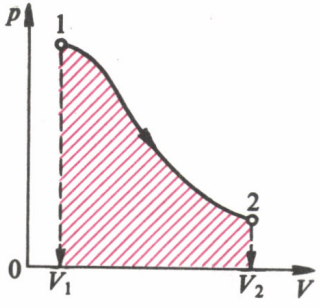
$$W = F\Delta l = pS\Delta l = p\Delta V = p(V_2 - V_1). \qquad (136)$$



106. ábra

A nem izobár kitáguláskor a gáz által végzett munka értékét nehezebb kiszámítani, mivel ekkor a tágulás során megváltozik a gáz nyomása, tehát a dugattyú elmozdítását végző erő értéke is időben változó lesz.

Tetszőleges tágulási folyamatnál a közölt munkát egyszerűen a következő szabály szerint számíthatjuk ki: a vizsgált folyamatot a $p-V$ koordináta-rendszerben ábrázoljuk és a V_1 és V_2 közötti szakaszon vett görbe alatti terület szolgáltatja a keresett munka értékét (lásd 107. ábra!).



107. ábra

Második diák: A közölt munka számítása ily módon világos. De hogyan lehet meghatározni az átadott hő mennyiségét?

Tanár: A (134) egyenlet segítségével meg tudjuk határozni, hogy a vizsgált folyamatban mennyit változik a gáz belső energiája. Ha kiszámítjuk a munkát, a (135) kifejezésből egyszerűen megkapjuk a hőmennyiséget is.

Első diák: Az izochor folyamat során munkavégzéssel nem történik energiaátadás. Bizonyára létezik olyan helyzet is, amikor nincs hőátadás?

Tanár: Természetesen. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a gáz hőszigetelt állapotban van. Apropó! Mit gondolnak, a hőszigetelt gáz esetében beszélhetünk izotermikus tágulásról?

Első diák: Miért ne?

Tanár: Csak lassan a testtel! Gondolja csak meg, kérem, hogy ebben a folyamatban nincs hőátadás, a gáz kitágul (tehát munkát végez), ugyanakkor a hőmérséklete változatlan marad!?

Második diák: Ilyen folyamat nem lehetséges. Ha a hőmérséklet állandó, akkor változatlan a gáz belső energiája is. Ez pedig azt jelenti, hogy ha a gázzal munkát akarunk végeztetni, akkor azzal kívülről kell hőt közölnünk.

Tanár: Így van. Tehát két tényről győződtünk meg: **először, hogy a hőszigetelt gázban izotermikus kitágulás nem léphet fel, másodszor pedig, hogy az izotermikus táguláskor a kívülről közölt hő mennyisége pontosan megegyezik a gáz által végzett munkával.**

Második diák: Én úgy gondolom, hogy a hőszigetelt gázban nemcsak izotermikus, hanem sem izobár, sem izochor folyamatok nem léphetnek fel.

Tanár: Jól gondolja. A hőszigetelt gázban végbemenő folyamatok ugyanis sajátságos jelleggel bírnak. Ezeket speciális elnevezéssel illetjük – adiabatikus folyamatoknak nevezzük őket.

Adiabatikus kitáguláskor a gáz úgy képes munkát végezni, hogy belső energiája egy részét elveszíti és ennek következtében a hőmérséklete csökken. Adiabatikus összenyomáskor a külső erők által végzett munka eredményeként nő a gáz belső energiája, ennek következtében pedig a hőmérséklete.

Ha a gáz összenyomása elegendően gyorsan megy végbe, akkor a hőátadás nem történhet meg időben, így – még hőszigetelés nélkül is – adiabatikus lesz a folyamat. Elegendően lassú összenyomás esetén pedig – amikor a gáz és a környezet között végbemegy a hőátadás – izotermikus lesz a folyamat (ha a környezettel azonos a hőmérséklete).

Most szíveskedjenek felrajzolni nekem a p-V koordináta-rendszerben a kitágulás izobár, izoterm és adiabatikus görbéjét! Vegyük úgy, hogy a gáz kezdeti állapota és végső térfogata mindhárom folyamatnál azonos! Vizsgáljuk meg ennél a három folyamatnál a gáz és a környezet hőcseréjét! Melyik esetben lesz a gáz által a kitáguláskor a környezetnek átadott munka értéke a legnagyobb? Melyik esetben lesz legnagyobb a hőátadás?

Második diák: Még nem tetszett nekünk megmutatni, hogyan kell ábrázolni az adiabatikus görbét.

Tanár: Viszont tudják, hogy az adiabatikus táguláskor a gáz hőmérséklete csökken.

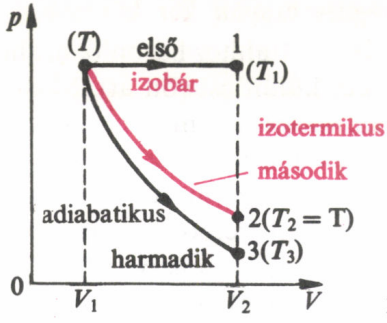
Második diák: Értem. A 108. ábrát rajzoltam fel, ahol az első görbe az izobár, a második az izotermikus, a harmadik pedig az adiabatikus állapotváltozást mutatja.

Tanár: Az ábra hibátlan. És mit tud mondani a gáz és a környezet közötti energiaátadásról ezekben a folyamatokban?

Második diák: Az 1. pontban $T_1 > T$, tehát $\Delta U > 0$, azaz az izobár kitáguláskor a gáz belső energiája megnő. A 2. pontban $T_2 = T$, tehát $\Delta U = 0$. A 3. pontban $T_3 < T$, tehát $\Delta U < 0$.

Tanár: Tudna erről többet is mondani?

Második diák: Hát nehezen. Hasonló feladattal ugyanis még soha nem volt dolgom.



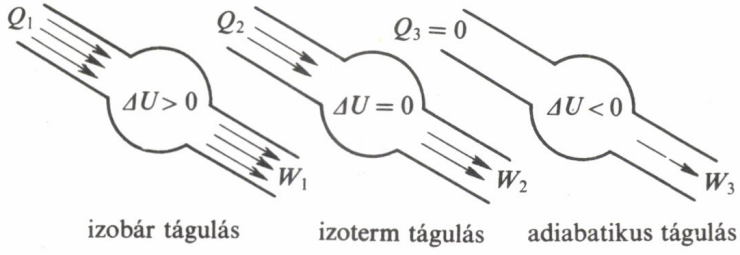
108. ábra

Tanár: Legyen a gáz által az izobár, izoterm és adiabatikus táguláskor végzett munka sorrendben W_1, W_2, illetve W_3! A megfelelő görbék alatti területek alapján világos, hogy $W_1 > W_2 > W_3$. Most vizsgáljuk az egyes folyamatokban végbemenő energiaátadást!

Az izobár táguláskor $\Delta U = Q_1 - W_1$, azaz a gáz a környezetből hőt vesz fel, amelynek egy része a gáz által végzett W_1 munkára, másik része belső energiájának növelésére fordítódik. Az izotermikus táguláskor $\Delta U = 0$, $Q_2 = W_2$, azaz a gáz a környezettől elvont Q_2 hőmennyiséget a W_2 munka alakjában visszaszolgáltatja, tehát a belső energiája változatlan marad.

Az adiabatikus táguláskor $\Delta U = -W_3$, $Q_3 = 0$, azaz a gáz nem vesz fel hőt, így az W_3 munkát belső energiája rovására végzi. A 109. ábra az említett folyamatok energiaátadási vázlatát mutatja. Az ábrán a bal oldali „csatornán" a gáz hőátadással energiát vesz fel, a jobb oldali „csatornán" át pedig a gázból munkavégzéssel energia távozik. A nyilak száma jól szemlélteti a megfelelő energiaátadás intenzitását.

Szeretném kiemelni, hogy **a gáz belső energia „tartalékát" még gondolatban sem szabad „tartalékhőre" és „tartalék munkára" bon-**



109. ábra

tani. A hőátadás és a munkavégzés csupán két különböző „csatorna", amelyeken át az energia távozhat (ahhoz hasonlóan, ahogyan egy medencébe is folyhat a víz két külön csövön át). Most pedig térjünk vissza a 96. ábrához, és vizsgáljuk meg az ábrán jelölt ciklikus folyamatban a gáz energiaátadását!

Második diák: Most már én is el tudom ezt végezni. Az 1 – 2 szakaszon (az izoterm folyamatban) a gáz a környezetből bizonyos mennyiségű hőt vesz fel, és azt teljes mértékben munkavégzésre fordítja. A 2 – 3 szakaszon (az izochor folyamatban) munkavégzés nem történik, a kívülről felvett hőmennyiség a gáz belső energiáját növeli. A 3 – 1 szakaszon (az izobár folyamatban) a gázzal bizonyos munkát közlünk, azonban eközben annak hőmérséklete csökken. Ez azt jelenti, hogy a gáz intenzív mértékben ad át hőt a környezetnek. (Az átadott hőmennyiség egyenlő a közölt munka és a belső energia csökkenésének összegével.)

Tanár: Ez mind igaz. Végül még egy kérdésem lenne: a 93. ábrán az egyik állapotból a másikba történő átmenetre 6 különböző folyamatot rajzoltunk fel. Mennyiben térnek el egymástól ezek a folyamatok termodinamikai szempontból?

Első diák: A gáz és a környezet között végbemenő energiaátadás módjában.

Tanár: Helyes. Kérem, hogy az anyag elmélyítése érdekében oldják meg önállóan az alábbi feladatokat.

Feladatok:

86. Vizsgáljuk meg a 93. ábrán bemutatott folyamatokat! Ismert a p_1, V_1, T_1, p_2, V_2 paraméter. Számítsuk ki a következő átmenetekben szereplő hőmennyiségek arányát: $1 \to 7$, $1 \to 8$, $5 \to 2$, $4 \to 2$.

87. A feltételek ugyanazok, mint a 86. feladatban. Számítsuk ki az $1 \to 6$, $3 \to 2$ és $1 \to 5$, $8 \to 2$ átmenetekben szereplő hőmennyiségek arányát.

Második diák: Ezeket a feladatokat úgy oldanám meg, hogy a közbenső állapot paramétereit és a végállapot hőmérsékletét a megadott paraméterek segítségével fejezném ki. Ezután az egyes folyamatokra kiszámítanám a gáz belső energiaváltozását, majd...

Tanár: (közbevág): Útmutatásul ennyi elegendő is lesz. Végül tegyünk még említést a hőtan egyik alapvető törvényéről, amelyet

Le Chatelier-tételnek neveznek. E tétel szerint bármilyen külső hatás, amely egy rendszert egyensúlyi helyzetéből igyekszik kimozdítani, ezt a hatást ellensúlyozó folyamatokat vált ki az adott rendszerben. Így például a test melegítése a hőnyeléssel kapcsolatos folyamatokat serkenti, míg a hűtés azoknak a folyamatoknak kedvez, amelyeknél hő válik ki. A Le Chatelier-tétel alapján előre megjósolható, milyen irányban tolódik el a rendszer egyensúlya, ha a rendszer állapotát meghatározó valamelyik paramétert (pl. a nyomását) megváltoztatjuk. **Ez az elv a Lenz-féle indukciós törvény (lásd 38. óra) termodinamikai analógja.**

25. MI A CARNOT-CIKLUS?

Tanár: Beszéljük meg most a hőerőgépek hatásfokát! Ismeretes a hatásfok kiszámítására valamilyen kifejezés?

Első diák: Igen, a következő:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} . \tag{137}$$

Tanár: Mit jelent a kifejezésben a T_1 és T_2 hőmérséklet?

Első diák: Úgy emlékszem, hogy a T_2 a „hűtőközeg", a T_1 pedig a „fűtőközeg" hőmérséklete. De nem tudnám pontosan megmondani, hogy mit neveznek hűtő-, illetve fűtőközegnek.

Tanár: És milyen esetre vonatkozik a (137) kifejezés?

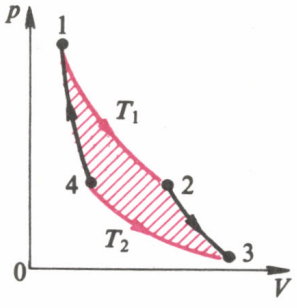
Második diák: Valahol olvastam, hogy azt a Carnot-ciklusra vezették le. Magáról a ciklusról azonban semmit nem tudok.

Tanár: Akkor engedjék meg, hogy a legelején kezdjem! Képzeljük el magunkban egy olyan hőerőgépet, amelynek a működése egy adott gázmennyiség (a munkatest) állapotváltozásán alapszik. Világos, hogy az állapotváltozásoknak egy ciklikus folyamatot kell alkotniuk, azaz a ciklus végén a gáznak mindig vissza kell térnie a kezdeti állapotba. A különböző gépekben ez a ciklus különféle módon megy végbe. Ebből következik, hogy eltérő lesz a gáz és a környezet között lejátszódó energiaátadás jellege is. Mindez igen fontos a hőerőgépek hatásfokának vizsgálatánál.

A legnagyobb hatásfokot azzal az ideális hőerőgéppel lehet elérni, amelyben a gáz állapotváltozása az ún. Carnot-ciklus szerint változik. A (137) kifejezés ebben az esetben adja meg a hatásfokot. Tételezzük fel, hogy két igen nagy test áll rendelkezésünkre, amelynek a hőmérséklete T_1, illetve T_2. Azért van szükségünk nagy testekre, hogy közöttük és a gáz között lejátszódó energiaátadás

következtében a T_1, T_2 hőmérsékletek értéke ne változzon. Ha $T_2 < T_1$, akkor a T_2 hőmérsékletű testet „hűtőközegnek", a T_1 hőmérsékletűt pedig „fűtőközegnek" nevezzük. A munkatest (a gáz) váltakozva kerül hőkontaktusba a hűtő-, illetve a fűtőközeggel és hőátadással energiaátadás megy végbe.

A Carnot-ciklus a 110. ábrán bemutatott két izotermából és két adiabatikus görbéből tevődik össze. Az $1-2$ szakaszon (a T_1-hez tartozó izoterma) a gáz a fűtőközegtől Q_1 hőt vesz fel, és kitágulva W_1 munkát végez. A $2-3$ (adiabatikus) szakaszon a gáz W_3 munkát végez, miközben a hőmérséklete T_2-re csökken. A $3-4$ szakaszon (a T_2-höz tartozó izoterma) a gáz a sűrítéshez szükséges W_2 munkával egyenlő Q_2 hőmennyiséget a hűtőközegnek adja át. A $4-1$ (adiabatikus) szakaszon a gáz sűrítésére fordított W_4 munka belső energiává alakul át, ennek következtében a gáz hőmérséklete a T_1 értékre nő. Végeredményben az 1 kezdeti állapotba jutunk vissza (tehát a gáz belső energiája is a kezdeti értéknek megfelelő lesz).



110. ábra

Tételezzük fel, hogy rendelkezünk egy, a Carnot-ciklus szerint üzemelő hőerőgéppel! A gáz ekkor a fűtőközegtől Q_1 hőt vesz fel, és Q_2 hőt ad le a hűtőközegnek. Mivel azonban $Q_1 = W_1$ és $Q_2 = W_2$, könnyen belátható, hogy $Q_2 < Q_1$, tehát a gáz kevesebb hőt ad le, mint amennyit felvesz. Ugyanakkor egy teljes ciklus alatt a gáz belső energiája nem változik meg. Ebből az következik, hogy a $Q_1 - Q_2$ hőmennyiségek különbsége, amelyet a gáz a környezetnek ad át, nem más, mint a hőerőgép hasznos munkája. Ennek alapján a hőerőgép hatásfokát a következő képlettel fejezhetjük ki:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \tag{138}$$

A termodinamikában elvégezhető annak bizonyítása (amelyet mi most nem teszünk), hogy a (138) egyenlet az egyszerűbb (137) alakra hozható.

A (137) és (138) egyenletekből kiderül, hogy a hatásfok nem függ a gáz mint segédmunkatest tulajdonságaitól. Ezenkívül természetesen az is, hogy a hatásfok még az ideális hőerőgépeknél is egy alatt marad, mivel a fűtőközeg által leadott energia T_1/T_2 hányada hő alakban haszontalanul megy át a hűtőközegbe.

A valóságban a hőerőgépek hatásfoka mindig kisebb, mint a (137) alapján kiszámított érték, a benne lejátszódó megfordíthatatlan folyamatok miatt.

Első diák: Létezik-e a valóságban a Carnot-ciklus szerint működő gép?

Tanár: Igen, ilyen gépnek tekinthetők a belső égésű motorok.

26. MENNYI A GÁZOK FAJHŐJE?

Tanár: Mi a fajhő?

Első diák: A fajhő az a hőmennyiség, amelyet közölnünk kell valamely 1 g tömegű testtel, hogy annak hőmérsékletét egy Kelvin-fokkal megnöveljük.

Tanár: Igen. És mennyi a gázok fajhője?

Első diák: Nem értem a kérdést.

Tanár: Akkor megpróbálom érthetőbben feladni a kérdést. Tételezzük fel, hogy egy gáz hőmérsékletét melegítéskor ΔT értékkel megnöveljük. Ezt kétféleképpen tehetjük: egyszer állandó térfogaton (izochor melegítés), illetve állandó nyomáson (izobár melegítés). Vajon mindkét esetben azonos hőmennyiségre van szükség?

Első diák: Szerintem igen.

Második diák: Szerintem pedig nem.

Állandó nyomáson ugyanis nincs munkavégzés, így a teljes hőmennyiség a gáz belső energiáját növeli. Jelöljük ezt a hőt Q_1-gyel. Állandó nyomáson történő melegítéskor a gáz minden esetben kitágul, tehát $W = p\Delta V$ munkát végez.

Ebben az esetben a gázzal közölt Q_p hőmennyiség egy része a gáz belső energiájának növelésére, másik része pedig a fenti munkára fordítódik. Tehát: $Q_p > Q_V$.

Tanár: Pontosan így van. Most térjünk vissza a fajhőre!

Első diák: Azt hiszem, megértettem.

A gáznak kétféle fajhője van: az egyik az állandó térfogaton mért (jelöljük ezt c_V-vel), a másik az állandó nyomáson mért (c_p).

Felírható, hogy $c_V = \frac{Q_V}{m\Delta t}$ és $c_p = \frac{Q_p}{m\Delta t}$. Ekkor pedig $c_p > c_V$.

Tanár: Így van. És ki tudnák nekem fejezni a c_p-t c_V-n keresztül?

Második diák: Hadd próbáljam meg én! A gáz belső energiáját a $Q_V = c_V m \Delta T$ növeli. Tehát:

$$Q_p = c_V m \Delta T + p \Delta V.$$

Ebből:

$$c_p = \frac{Q_p}{m \Delta T} = c_V + p \frac{\Delta_V}{m \Delta T}, \tag{139}$$

Tanár: Továbbá felhasználva a gáz állapotegyenletét, kapjuk:

$$p \Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta T,$$

tehát a behelyettesítés után végső alakban:

$$c_p = c_V + \frac{1}{\mu} R. \tag{140}$$

A (140) egyenletből kitűnik, hogy az R univerzális gázállandó értéke bármely ideális gáz egy mólnyi mennyiségének $c_p - c_V$ fajhőkülönbségével egyenlő.

27. BESZÉLGESSÜNK A TEREKRŐL!

Tanár: Beszélgessünk most egy kicsit az egyik alapvető fizikai fogalomról, a térről! Hogy konkrétabb legyen a témánk, szűkítsük azt az elektrosztatikus térre! Hogyan képzelik el maguknak: mi is az a tér?

Első diák: Bevallom, én nehezen tudom elképzelni a teret. Számomra olyannak tűnik, mint egy kísértet, amely láthatatlan, megfoghatatlan, ugyanakkor azt állítják, hogy mindenütt jelen van. Nem vitázom azzal az állítással, hogy a tér anyagi. Maga a kijelentés azonban számomra üresen cseng. Amikor az anyagról beszélünk, értem miről van szó. Amint azonban a térről hallok, egyszerűen nem tudom felfogni, hogy végeredményben mi az.

Második diák: Én egészen szemléletesen el tudom képzelni a teret. Az anyagi megnyilvánulási formában az anyag mintegy koncentrált alakban van jelen. Ezzel szemben a térben az anyag mintegy annak térfogatában „el van kenve". Az a tény, hogy a teret szabad szemmel nem láthatjuk, még semmit sem bizonyít, hiszen a teret már viszonylag egyszerű eszközökkel is gyönyörűen „megláthatjuk". **A tér testek kölcsönhatásában közvetítő szerepet tölt be.**

Például az elektrosztatikus tér a mozdulatlan elektromos töltések kölcsönhatását közvetíti. Vehetjük úgy, hogy minden egyes töltés teret „hoz létre" maga körül. Az egyik töltés által létrehozott tér hatással van a másik töltés által létrehozott térre, és viszont. Ily módon valósul meg a töltések Coulomb-féle kölcsönhatása.

Első diák: És „közvetítők" nélkül nem tudnánk meglenni? Mi akadályoz meg bennünket abban, hogy feltételezzük: az egyik töltés közvetlenül hat a másikra?

Második diák: Az ilyen feltételezéssel szemben komoly érveket lehet felsorakoztatni. Tételezzük fel például, hogy valamely pillanatban az egyik töltés valamilyen oknál fogva elmozdul, mintegy „meg-

ugrik". Ha a „közvetlen kölcsönhatásból" indulunk ki, akkor azt a következtetést kell levonnunk, hogy ugyanabban a pillanatban a második töltésnek is „meg kell ugrania". Ez azt jelentené, hogy az első töltés azonnal továbbította a jelet a második töltésnek, ami – mint ismeretes – ellentmondásban van a relativitáselmélet alapvető feltételeivel. Ha azonban a kölcsönhatások továbbítása egy közvetítő közeg – azaz a tér – segítségével megy végbe, akkor egy adott jel az egyik töltéstől egy másik töltéshez a tér útján közvetítődik. Bármennyire nagy sebességgel terjed egy jel, ez a sebesség mégis véges, tehát létezhet egy bizonyos időintervallum, amikor az első töltés „ugrása" már véget ért, a másodiké pedig még nem kezdődött el. Ezen idő alatt csak a tér tartalmazza az „ugrásra" vonatkozó jelet.

Első diák: Jó, jó, de én mégis szívesen hallanám a tér pontos meghatározását.

Tanár: Érdeklődéssel hallgattam dialógusukat. Érzem, hogy egyikük érdeklődik a modern fizika problémái iránt, és több népszerű fizikakönyvet is olvasott. Ennek eredményeként kialakult benne egy szemléletmód, amelyet konstruktív gondolkodásmódnak is nevezhetnénk. A tér számára teljesen reális, „mindennapi" fogalomnak tűnik. Észrevételei a térről mint a kölcsönhatások közvetítőjéről, teljesen helytállóak. Másikuk viszont feltételezhetően megelégedett a tankönyv formális megtanulásával. Ebből fakad, hogy az ő gondolkodása sokkal inkább kétségbeesettnek tűnik. Természetesen, ezzel az észrevételemmel egyáltalán nem akarom megsérteni vitapartneremet, csupán az ő példáján szeretném megmutatni, hogy hasonló szituációban igen sok vizsgázó mennyire tehetetlennek érzi magát. Bármennyire is meglepő, az a helyzet, hogy nagyon sok diák idegenkedik a népszerűen megfogalmazott tudományos irodalomtól. De térjünk most vissza a vizsgált kérdés lényegéhez! (Az első diákhoz:) Azt kívánta, hogy adjuk meg a tér pontos definícióját. E nélkül nem tudja elképzelni a teret. Mint mondta, viszont azt el tudja képzelni, hogy mi az anyag. És az anyag pontos definíciója ismeretes?

Első diák: Az anyag fogalma nem igényel pontos definíciót. Hiszen az anyagot kézzel is „megérinthetjük".

Tanár: Ez esetben a tér fogalma sem igényel definíciót, mert a teret is „megérinthetjük" – igaz, hogy nem szabad kézzel. A definíció kérdése azonban ennél sokkal komolyabb kérdés. Egy pontos, logi-

kailag kifogástalan definíció azt jelenti, hogy a vizsgált fogalmat valamely „elsődlegesebb" fogalmak segítségével fejezzük ki. De mit tehetünk akkor, ha az adott fogalom maga is az „elsődleges" fogalmak közé tartozik? Próbálják csak meg pl. definiálni az egyenesvonalat, mint geometriai fogalmat! Nagyjából ugyanaz a helyzet az „anyag" és a „tér" esetében is. Ezek annyira elsődleges, fundamentális fogalmak, hogy aligha várhatunk olyan pontos definíciót, amely magában foglalná a lényeget.

Első diák: Bizonyára megkísérelhető azonban egy közelítő definícióban összefoglalni a jellemző vonásokat.

Tanár: Természetesen. Azt azonban nem szabad szem elől téveszteni, hogy egyetlen ilyen meghatározás sem törekedhet a teljességre. A matériának különféle megjelenési alakjai lehetnek. Koncentrálódhat a térnek egy meghatározott kiterjedésű, gyengébb vagy erősebb mértékben körülhatárolt részében (azaz „lokalizálódhat"), illetve más esetben „delokalizálódhat". A matéria előbbi állapotát az „anyaggal", míg az utóbbit a „tér" fogalmával hozhatjuk összefüggésbe. A sajátos jellegzetességek mellett a két állapot azonos fizikai vonásokkal is rendelkezik. Pl. mind az anyag egységnyi térfogata, mind a tér egységnyi térfogata rendelkezik bizonyos energiával. Beszélhetünk az anyag egységnyi térfogatának impulzusáról és a tér egységnyi térfogatának impulzusáról is.

A tér egy adott fajtája egy adott típusú kölcsönhatás közvetítőjének szerepét tölti be. Pontosan ez a konkrét kölcsönhatási forma nyújt arra lehetőséget, hogy a tér valamely pontjában meghatározzuk annak fizikai jellemzőit. Pl. az elektromos töltéssel rendelkező test elektrosztatikai teret hoz létre maga körül. Ezt a teret csak úgy tudjuk észlelni és jellemezni, ha a tér egy adott pontjába egy másik, elektromosan töltött testet helyezünk el és megmérjük ez utóbbira ható erőt. A mérés során feltételezzük, hogy a második test elegendően kicsi ahhoz, hogy a mérendő térre gyakorolt módosító hatása elhanyagolható.

Az anyag tulajdonságainak sokasága kimeríthetetlen és a megismerési folyamat végtelen. A bennünket körülvevő anyagi világ megismerése és az ismeretek gyakorlati hasznosítása területén folyamatosan haladunk előre. Az előrehaladás során időnként kénytelenek vagyunk valamit „elkeresztelni", hogy ezzel mintegy jelzőtáblát állítsunk a megismerés útjára. Azzal együtt, hogy valamit „térnek" neveztünk, tudatában vagyunk annak, hogy ez a valami

önmagában egy „végtelen üreg". Sok mindent ismerünk már a térnek nevezett „üregről", ezért többé-kevésbé kielégítően alkalmazzuk az újonnan bevezetett fogalmat. Sok mindent ismerünk, azonban korántsem mindent! Ha megkísérelnénk ezt a valamit pontosan definiálni, ez ugyanolyan vállalkozás lenne, mintha meg akarnánk mérni egy feneketlen szakadék mélységét.

Második diák: Én úgy gondolom, hogy a tér fogalma – az anyagi világ megismerési folyamatában keletkezett más fogalmakhoz hasonlóan – kimeríthetetlen. Pontosan ezért nem adható meg a tér kimerítő, pontos definíciója.

Tanár: Tökéletesen egyetértek.

Első diák: Amikor az anyagról és a térről, mint a matéria két különböző – lokalizált és delokalizált – állapotáról tetszett beszélni, akkor úgy tűnt, hogy megértettem a lényeget. Nem tudom, miért kellett ehhez még hozzátenni a fizikai fogalmak kimeríthetetlenségéről és a megismerési folyamat végtelenségéről elmondottakat. Amikor erre figyeltem, ismét minden homályossá és képlékennyé vált előttem.

Tanár: Megértem a pszichológiai beállítottságát. Azt várja, hogy egy megnyugtató definíció álljon rendelkezésére – legyen az akár közelítő pontosságú. Kész arra, hogy ezt a definíciót lelkiismeretesen kívülről tanulja, és ha kérdezik, elmondja azt. Nem hajlandó elismerni, hogy maga a szituáció nem statikus, hanem dinamikus. Nem szabad azt hinni, hogy minden képlékennyé válik és szétfolyik. Én inkább azt mondanám, hogy minden folyamatot a maga dinamikájában kell vizsgálni. Minden pontos definíció egy már lezárt megismerési folyamat eredményét rögzíti. **A fizikai fogalmakat azonban éppenhogy fejlődésükben kell vizsgálni!** Az, amit mi a tér fogalma alatt tegnap értettünk, jelentősen különbözik attól, ahogyan azt ma értelmezzük. Így pl.: **a modern fizika – a klasszikus fizikával ellentétben – nem von meg éles határvonalat a tér és az anyag között. A modern fizikában a tér és az anyag kölcsönösen átalakulhatnak egymásba: az anyag átalakul térré, a tér pedig anyaggá.** Ne bocsátkozzunk azonban túlságosan a részletekbe, mert ezzel indokolatlanul messze előre elkalandoznánk.

Második diák: Eljutottunk oda, hogy a fizikáról filozófiai vitát folytatunk.

Tanár: Ez természetes is, hiszen **a fizikai fogalmak megvitatásához feltétlenül szükség van fejlett dialektikus gondolkodásmódra.** Ha ez

a gondolkodásmód még nem alakult ki, akkor akarva, akaratlanul is filozófiai vonatkozású kitérőket kell tennünk. Pontosan ezért tudom határozottan azt javasolni, hogy a tankönyv mellett egyéb könyveket is gyakrabban forgassanak. Ily módon fejleszteni tudják saját gondolkodásmódjukat, rugalmasabbá, dinamikusabbá, sőt, azt mondhatnám, kevésbé bürokratikussá tudják azt formálni. Ezen a téren felbecsülhetetlen segítséget jelent minden fiatal fizikusnak V. I. Lenin: *Materializmus és empiriokriticizmus* című könyve. Javaslom, hogy olvassák el.

Első diák: De hiszen ez egy meglehetősen nehéz könyv, amely már egyetemi tananyag.

Tanár: Én nem azt erőltetem, hogy alaposan tanulmányozzák át ezt a könyvet. Valóban nem könnyű olvasmány. Azért próbálják meg csak úgy figyelmesen átolvasni. Bizonyos vagyok benne, hogy hatással lesz gondolkodásmódjukra; előképzettségüktől függően – kisebb vagy nagyobb mértékben. Mindenesetre hasznukra fog válni. Egyelőre pedig kíséreljük meg más oldalról megközelíteni a problémát! Vizsgáljuk meg azt a kérdést: hogyan jellemezhető az elektrosztatikus tér? Tudom, erre a kérdésre választ kapva sokan azt fogják mondani: „Most már tudjuk, mi a tér!"

28. HOGYAN JELLEMEZHETŐ AZ ELEKTROSZTATIKUS TÉR?

Tanár: Folytassuk beszélgetésünket az előző fejezetben megkezdett témáról! A kérdést úgy vetjük fel: hogyan jellemezhető az elektrosztatikus tér?

Második diák: **Az elektrosztatikus tér jellemzésére a térerősségnek nevezett vektormennyiségeket használják. Az E térerősség a tér minden egyes pontjában meghatározott iránnyal és nagysággal rendelkezik. Ha a tér egyik pontjából oly módon közelítünk egy másik ponthoz, hogy közben a térerősség-vektorok mindvégig érintőlegesek maradjanak az elmozdulás pályájára, akkor az így kapott pályák a tér „erővonalait" adják meg. Az erővonalakkal a tér igen szemléletesen ábrázolható.**

Tanár: Helyes. Most pedig lássuk a konkrét esetet! Az egymástól r távolságra elhelyezkedő q_1 és q_2 töltés között ható Coulomb-erő értékét vákuumban a következő alakban írjuk fel:

$$F_e = \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \tag{141}$$

Ezt a kifejezést a következő alakra hozzuk:

$$F_e = E(r) q_2, \tag{142}$$

$$\text{ahol: } E(r) = \frac{q_1}{r^2} \cdot \tag{143}$$

A (143) kifejezés arról tanúskodik, hogy a q_1 töltés egy olyan teret hoz létre maga körül, amelynek térerőssége a töltéstől mért r távolságra q_1/r^2 értékű lesz. A (142) kifejezésből pedig kiolvasható, hogy ez a tér a q_1 töltéstől r távolságra elhelyezett q_2 töltésre $E(r)q_2$ erővel hat. A (141) egyenletet oly módon írtuk át, hogy

felhasználtuk a tér jellemző paraméterét, az E „közvetítő" értékét. Határozzuk meg a (141) és (143) egyenletek értelmezési tartományát!

Második diák: A (141) egyenlet két pontszerű töltésre érvényes. Mivel a (142) és (143) egyenleteket a (141)-ből kaptuk, tehát ezek értelmezési tartományának is ugyanilyennek kell lennie.

Tanár: A dolog azonban nem ilyen egyszerű. A (141) és (143) kifejezésekhez képest a (142) értelmezési tartománya jóval szélesebb. Bármilyen test (pontszerű töltés, pontszerű töltések halmaza, tetszőleges alakú töltött test) hozza is létre az E teret, a q_0 töltésre ható erő minden esetben egyenlő lesz a q_0 töltés és azon pont térerősségének szorzatával, ahol az adott töltés található. A (142) kifejezés általános alakban a következő vektoriális egyenlettel írható fel:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{E}(\mathbf{r})q. \tag{144}$$

A (144) kifejezésből kiderül, hogy a tér adott pontjában a q_0 töltésre ható erő iránya egybeesik az adott pontbani térerősség irányával, ha a q_0 értéke pozitív. Ha q_0 negatív értékű, akkor az erő a térerősséggel ellentétes irányú.

Itt érezhető a tér értelmezésének „önállósága". A töltéssel rendelkező különféle testek különböző elektrosztatikus teret hoznak létre maguk körül, azonban a terek mindegyike egy és ugyanazon törvény szerint hat (144) a benne elhelyezett töltésre. Ha a töltésre ható erőt ki akarjuk számítani, akkor előbb meg kell határoznunk a térerősséget arra a pontra vonatkozóan, ahol az adott töltés található. Tehát szükséges ismernünk a töltésrendszerek által keltett térerősség kiszámítási módját. Tételezzük fel, hogy rendelkezésre áll q_1 és q_2 töltés. Bármelyik töltés által létrehozott tér erősségét (irány és nagyság szerint) könnyen meghatározhatjuk a tér bennünket érdeklő tetszőleges pontjára.

Legyen az $\mathbf{r}$ vektor által megadott pontban a térerősségvektorok értéke $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$, illetve $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$. Az $\mathbf{r}$ pontban ható, eredő térerősség értékét az egyes töltések által keltett térerősség vektoriális összegzésével kapjuk:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}). \tag{145}$$

Ismételten aláhúznám, hogy a térerősségek összegzését vektoriálisan kell végrehajtani. (Az első diákhoz:) Érti ezt?

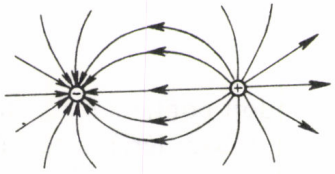
Első diák: Igen, én tudom, hogy a térerősségeket vektoriálisan kell összegezni.

Tanár: Rendben van. Akkor lássuk, hogyan tudja ezt a gyakorlatban alkalmazni! Rajzolja fel, kérem két eltérő előjelű ($+q_1$ és $-q_2$) töltés által létrehozott térben az erővonalakat, ha az egyik (pl. a $+q_1$) töltés többszöröse a másiknak.

Első diák: Ezt én nem tudnám felrajzolni. Korábban mi ilyen tereket nem vizsgáltunk.

Tanár: És milyen tereket vizsgáltak?

Első diák: Ismert előttem, hogyan néz ki két azonos nagyságú pontszerű töltések terének erővonal-ábrázolása. Ezt a 111. ábrán mutatom be.



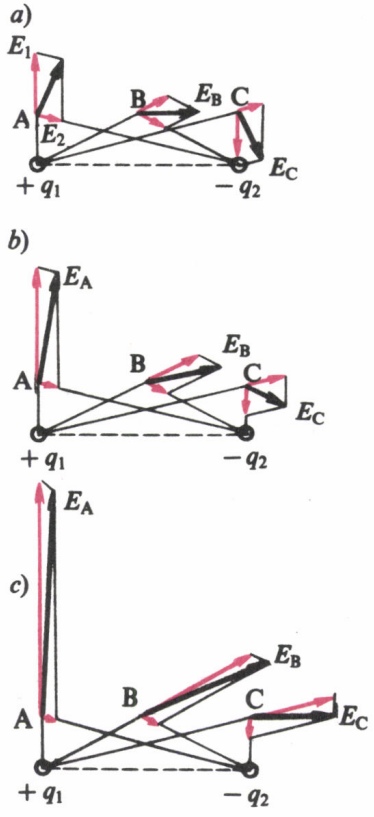
111. ábra

Tanár: A rajz egy kissé pontatlan, bár kvalitatíve helyesen tükrözi az azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltések erőterét. Tényleg nem tudja elképzelni, hogyan változik meg ez a kép, ha az egyik töltés nagyságát növeljük?

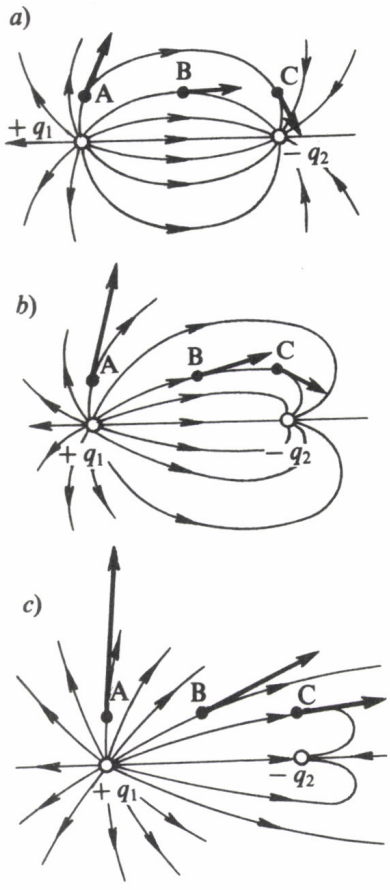
Első diák: A középiskolában ilyent sohasem tanultunk.

Tanár: Akkor próbáljunk kiindulni a térerősségek vektoriális összegezéséből! Kezdjük az ismert esettel, amikor a töltések azonos nagyságúak (112. *a)* ábra). Válasszunk ki három pontot; az A, B, C pontokat, és ezek mindegyikében szerkesszük meg az $\mathbf{E}_1$ és $\mathbf{E}_2$ térerősségvektorpárt ($\mathbf{E}_1$ a $+q_1$ töltés térerőssége, $\mathbf{E}_2$ pedig a $-q_2$ töltés térerőssége! Ezek után minden egyes pontban végezzük el az $\mathbf{E}_1$ és $\mathbf{E}_2$ vektorok összegzését! Ily módon az $\mathbf{E}_A$, $\mathbf{E}_B$ és $\mathbf{E}_C$ eredő vektorokat kapjuk. Az eredő vektoroknak érintőlegesnek kell lenni az adott ponton áthaladó erővonalhoz. A három vektor már közelítőleg megmutatja, milyen alakot vesznek fel a 113. *a)* ábrán bemutatott erővonalak. Kérem, hasonlítsa össze ezt az ábrát az Ön által felrajzolt 111. ábrával! Figyelje meg, milyen hibát ejtett az erővonalaknak a $-q$ töltéstől balra, illetve a $+q$ töltéstől jobbra

eső részeinek ábrázolásakor! Most pedig tegyük fel, hogy a $+q_1$ töltés értéke kétszeresére nőtt, $-q_2$ értéke pedig felére csökkent (112. *b)* ábra). Válasszuk ki ismét a térben az A, B és C pontokat. Szerkesszük meg ezekben a pontokban előbb az egyes töltések térerősségvektorait, majd az $\mathbf{E}_A$ $\mathbf{E}_B$ és $\mathbf{E}_C$ eredő vektorokat. Az eredő vektorok segítségével felrajzolt erővonalakat a 113. *b)* ábra mutatja be.



112. ábra



113. ábra

Végül vizsgáljuk meg azt az esetet, ha a q_1 töltés még kétszeresére nő, q_2 pedig tovább csökken a felére (112. *c)* ábra). Szerkesszük meg az A, B, C pontokban az $\mathbf{E}_A$, $\mathbf{E}_B$, $\mathbf{E}_C$ vektorokat. Az ennek alapján kapott erővonalakat a 113. *c)* ábra szemlélteti.

Jól látható, hogy a $+q_1$ töltés relatív értékének növelésével erősen nő annak domináns szerepe, a q_1 töltés tere kifejezetten elnyomja a $-q_2$ töltés terét.

Első diák: Most már azt is értem, hogyan szerkeszthetjük meg a több töltést tartalmazó rendszer erővonalait.

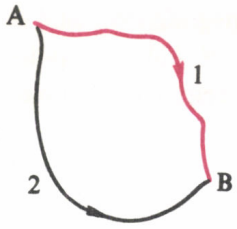
Tanár: Folytassuk az elektrosztatikus tér vizsgálatát! Az elektrosztatikus tér is rendelkezik egy igen fontos tulajdonsággal, amely a nehézségi erőtérrel való rokonságra utal, nevezetesen: **az erőtér által kifejtett munka bármely zárt pálya mentén nullával egyenlő.** Más szavakkal ez azt jelenti, hogy ha egy töltés a térben elmozdulva visszatér eredeti helyzetébe, akkor az erőtér által az elmozdulás során kifejtett munka összege nulla. Az elmozdulás egyes szakaszain a munka lehet pozitív, más szakaszain pedig negatív értékű, eredője azonban nulla lesz. Az elektrosztatikus térnek ez a tulajdonsága érdekes következményekre vezet. Rá tudnának mutatni ezekre a tulajdonságokra?

Második diák: Nem, nekem ez most valahogy nem jut eszembe.

Tanár: Majd segítek egy kicsit. Bizonyára felfigyeltek arra, hogy az elektrosztatikus tér erővonalai sohasem zártak. Az erővonalak a töltésekből indulnak ki és azokba futnak be (a pozitív töltésekből a negatív töltésekbe tartanak) vagy pedig a végtelenbe távoznak (illetve a végtelenből érkeznek). Nem tudnák ezt a jelenséget összefüggésbe hozni az elektrosztatikus tér fent említett tulajdonságával?

Második diák: Úgy tűnik, hogy én már értem, miről van szó. Ha az elektrosztatikus tér erővonala önmagában záródna, akkor állandóan az erővonal mentén haladva, vissza tudnánk jutni az eredeti helyzetbe. Mivel azonban a töltésnek az erővonal mentén történő elmozdulása során a tér által kifejtett munka előjele nem változik, világos, hogy az összes munka nem lehet nullával egyenlő. Másik oldalról viszont tudjuk, hogy bármely zárt pálya mentén kifejtett munka összege nulla kell hogy legyen. Tehát **az elektrosztatikus tér erővonalai nem lehetnek önmagukban visszatérő görbék.**

Tanár: az elektrosztatikus tér említett tulajdonságaiból ered egy másik következmény is: **egy töltésnek a tér egyik pontjából egy másik pontjába történő elmozdítására fordított munka nagysága nem függ a pálya alakjától, amely mentén az elmozdulás történik.** Valóban, mozdítsuk el a 114. ábrán a töltést az A pontból a B pontba két eltérő, az 1. és 2. pálya mentén. Jelöljük a töltés elmozdításához



114. ábra

az 1. pálya mentén szükséges munka mennyiségét W_1-gyel, a 2. pálya mentén pedig W_2-vel. Írjunk le egy teljes kört: az A pontból a B pontba az 1. pályán haladva, majd a B pontból az A pontba a 2. pályán. A 2. pályán visszafelé haladva $-W_2$ munka befektetése szükséges. A teljes kör megtételekor kifejtett munka: $W_1 + (-W_2) = W_1 - W_2$. Mivel bármely zárt pálya mentén a teljes munka értéke nulla, ebből azt kapjuk, hogy $W_1 = W_2$. Az a tény, hogy a töltés elmozdításához szükséges munka mennyisége nem függ az elmozdulás pályájától, hanem azt teljes mértékben a kezdeti és végpont helyzete határozza meg, lehetővé teszi, hogy ezt az értéket a tér jellemző paramétereként tudjuk felhasználni (mivel csupán a tér pontjainak kiválasztásától függ!). Ily módon eljutottunk az elektrosztatikus térnek egy újabb paraméteréhez – a potenciálhoz. A térerősségtől eltérően, ez skaláris mennyiség, mivel a munka segítségével fejezzük ki.

Második diák: Mi úgy tanultuk, hogy a potenciál fogalma önmagában nem értelmezhető. Fizikai értelmet csak abban az esetben nyer, ha a tér valamely két pontjában meglevő potenciálkülönbséget vizsgáljuk.

Tanár: Igaza van. Valóban, ha pontosak akarunk lenni, a fenti vizsgálódás alapján éppen a potenciálkülönbség fogalmát vezethetjük be, azaz a tér A és B pontja potenciálkülönbségét (amelyet jelöljünk $U_A - U_B$-vel) a q_0 töltésnek az A pontból a B pontba történő elmozdulása során a tér által kifejtett munka és a q_0 töltés hányadosa adja meg:

$$U_A - U_B = \frac{W_{A \to B}}{q_0}. \tag{146}$$

Ha azonban azt feltételezzük, hogy a végtelenben a tér nem létezik (azaz $U_\infty = 0$), akkor a (146) kifejezés a következő alakot ölti:

$$U_A = \frac{A_{A \to \infty}}{q_0}. \tag{147}$$

Tehát egy adott pontban a tér potenciája megadható azzal a munkával, amelyet a térerőnek az egységnyi pozitív töltésre kell gyakorolnia ahhoz, hogy azt az adott pontból a végtelenbe mozdítsa el.

Ha nem a tér által kifejtett, hanem a térerő ellenében végzett munkát vizsgáljuk, akkor a tér egy adott pontjában a potenciál azzal a munkával egyenlő, amelyet az egységnyi pozitív töltésnek a végtelenből az adott pontba való elmozdítása során kell kifejtenie. Világos, hogy a potenciál ily módon történő meghatározása nem teszi lehetővé a tér egy adott pontjában uralkodó potenciál értékének mérését, mivel a kísérlet során nem tudunk az adott ponttól végtelenül eltávolodni.

Kényelmi okokból feltételezzük, hogy a végtelenben a potenciál értéke nullával egyenlő. A fenti feltételezések esetén a q_1 pontszerű töltés terének potenciálja a töltéstől r távolságra:

$$U(r) = \frac{q_1}{r} \cdot \tag{148}$$

Ennek alapján nem nehéz meghatározni, mivel egyenlő több pontszerű töltés terének potenciálja valamely **r** pontban.

Második diák: Jelöljük az **r** pontban az egyes töltésektől származó potenciálokat $U_1(\mathbf{r})$ és $U_2(\mathbf{r})$-rel. Az $U(\mathbf{r})$ eredő potenciál – amint az könnyen belátható – az egyes töltésekből származó potenciálok algebrai összegével egyenlő:

$$U(\mathbf{r}) = U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) + \ldots \tag{149}$$

Az összegzésnél a pozitív töltést pozitív, a negatív töltést pedig negatív előjellel kell venni.

Tanár: Helyes. Most pedig vizsgáljuk meg az ekvipotenciális felületek értelmezését.

A tér azon pontjainak mértani helyét, amelyek egy és ugyanazon potenciállal rendelkeznek, ekvipotenciális felületnek (vagy azonos potenciálú helyeknek) nevezzük. A tér minden egyes pontján egy erővonal és egy ekvipotenciális felület halad át.

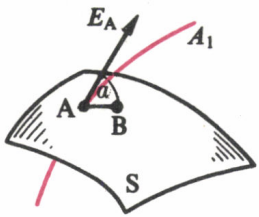
Milyen az erővonal és az ekvipotenciális felület egymáshoz viszonyított helyzete?

Második diák: Én úgy tudom, hogy **az erővonal és az ekvipotenciális felület a tér minden egyes pontjában merőleges egymásra.**

Tanár: Be is tudná ezt bizonyítani?

Második diák: Nem, bebizonyítani nem tudom.

Tanár: Pedig a bizonyítás egyszerű. Legyen az A ponton áthaladó erővonal az AA_1, az ekvipotenciális felület pedig az S (115. ábra).



115. ábra

A térerősséget az A pontban az $\mathbf{E}_A$ vektor fejezi ki. Mozdítsuk el a q_0 töltést az A pontból az S ekvipotenciális felület mentén a Δl igen kis távolságra fekvő B pontba. Az elmozdulás során kifejtett munka értéke:

$$W = F_e \Delta l \cos \alpha = E_A q_0 \Delta l \cos \alpha, \tag{150}$$

ahol: α – az $\mathbf{E}_A$ vektor és az elmozdulás iránya által bezárt szög. Ugyanezt a munkát kifejezhetjük az A és B pontban levő potenciálok különbségével is.

Tehát felírhatjuk a következő kifejezést is:

$$W = q_0(U_A - U_B). \tag{151}$$

Mivel az A és B pontok ugyanazon az ekvipotenciális felületen helyezkednek el, ezért $U_A = U_B$. Tehát a (151) kifejezés alapján a munka értéke nullával egyenlő. Behelyettesítve ezt a (150) kifejezésbe, a következőt kapjuk:

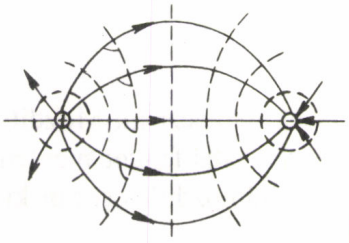
$$E_A q_0 \Delta l \cos \alpha = 0.$$

A kifejezés bal oldalán álló tényezők közül csak $\cos \alpha$ értéke lehet nullával egyenlő. Tehát $\alpha = 90°$. Világos, hogy a különböző AB elmozdulási irányokra ugyanezt az eredményt kapjuk, csupán az a lényeges, hogy az elmozdulás az ekvipotenciális felület mentén menjen végve. A felület görbületi sugara nem befolyásolja az eredményt, mivel a Δl elmozdulás értéke igen kicsi.

Az elektrosztatikus tér grafikus ábrázolására az erővonalakon kívül az ekvipotenciális felületek metszetét is felhasználják. Az erő-

vonalak és a felületek kölcsönös merőlegességének felhasználásával az ismert erővonalsereg alapján felrajzolható az ekvipotenciális felületek metszete, és viszont. (Az első diákhoz:) Próbálja meg felrajzolni a 113. *a)* ábrán bemutatott esetben az ekvipotenciális felületek metszetét! Az erővonalaktól való megkülönböztetés érdekében kérem, hogy a felületek metszetét szaggatott vonallal jelöljük.

Első diák: A szaggatott vonalakat oly módon húzom meg, hogy azok mindvégig merőlegesen metsszék az erővonalakat. Az eredményt a 116. ábra szemlélteti.



116. ábra

Tanár: A rajz helyes.

Első diák: A felvételi vizsgafeladatokban milyen fajta elektrosztatikus terek fordulnak elő? Jó lenne a legfontosabb kifejezéseket egységesen összefoglalni.

Tanár: Ezt egyszerűen megtehetjük. A feladatokban ugyanis háromféle tér fordul elő:

a) homogén tér (a térerősség minden pontban azonos):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{konst.} \quad \text{és} \quad U_A - U_B = Er_{AB} \tag{152}$$

(itt: r_{AB} – az A és B pontok közötti távolság vetülete a térerősség irányára);

b) a q pontszerű töltés tere:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{r^2} \cdot \mathbf{n} \quad \text{és} \quad U(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} \tag{153}$$

(itt $\mathbf{r}$ – a töltésből a megfigyelési pontba irányuló rádiuszvektor, $\mathbf{n}$ – az egységvektor: $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$);

c) több pontszerű töltés tere. Ez utóbbi esetben – mint arra már

korábban rámutattunk – **a térerősség az egyes töltésekből eredő térerősségek vektori eredője, a potenciál pedig az egyes töltések potenciáljainak skaláris összege.**

Tárgyaljuk meg kissé részletesebben a homogén teret! Hogyan gondolják, elegendő-e a homogén teret úgy meghatározni, hogy az egy olyan tér, amelynek minden pontjában a térerősség azonos irányba mutat?

Második diák: A térerősség nagyságáról egyáltalán nem is esik szó?

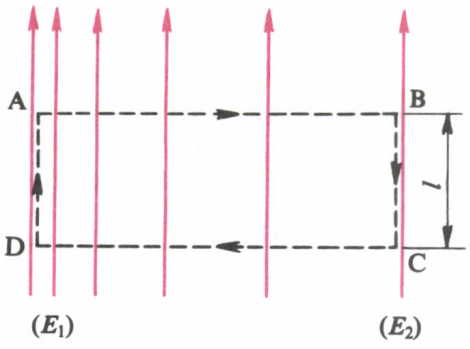
Tanár: Nem, nem esik.

Második diák: Ebben az esetben szerintem ez kevés. A homogén tér minden egyes pontjában a térerősség mind irány, mind pedig nagyság szerint megegyezik.

Tanár: Ez igaz. Nem fordulhat azonban elő, hogy a térerősség irányának egybeeséséből azok értékének megegyezése is következik?

Második diák: Nem értem, miért lenne így?

Tanár: Akkor vizsgáljuk meg a 117. ábrán bemutatott tér erővonalait!



117. ábra

Előrebocsátom, hogy minél sűrűbben helyezkednek el az erővonalak, annál nagyobb a térerősség értéke. Az ábra alapján $E_1 > E_2$. Számítsuk ki a q töltésnek az ABCD zárt pálya mentén történő elmozdításához szükséges munka értékét!

Második diák: De minek van erre szükség, hiszen előre tudjuk, hogy a munkának nullával kell egyenlőnek lennie?

Tanár: Számítsuk ki azért mégis a munkát a zárt pálya minden egyes szakaszára.

Második diák: Az AB és CD szakaszokon a munka értéke nulla, mivel itt az erővonalak merőlegesek az elmozdulás irányára. A BC szakaszon a munka $-qE_2l$, a CA szakaszon pedig qE_1l értékű.

Tanár: És mi lesz a végeredmény?

Második diák: Érdekes! $q(E_1 - E_2)l$ értéket kapunk, ami viszont nem egyenlő nullával. Ez tiszta abszurdum!

Tanár: És mi a következtetése?

Második diák: Egyetlen következtetésre tudok jutni, hogy a 117. ábrán bemutatott tér a valóságban nem létezhet.

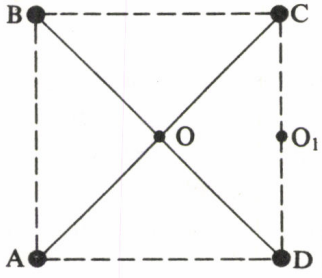
Tanár: Pontosan erről van szó. Tehát, ha az erővonalak párhuzamosak, akkor azonos sűrűségűeknek is kell lenniük (ha a térerősség iránya minden egyes pontban azonos, akkor az értékének is megegyezőnek kell lennei).

Második diák: Ez meglehetősen érdekes eredmény.

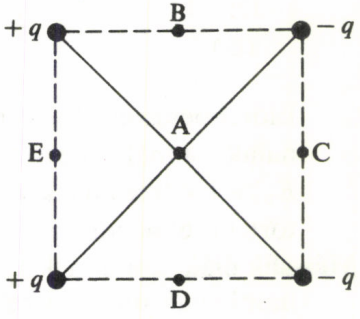
Feladatok:

88. A 118. ábra 4 db, azonos 2 C értékű pontszerű töltést mutat be. A négyzet oldala 2 m hosszú. Számítsuk ki a töltésrendszer térerősségirányait az O és O_1 pontokban, ha: *a)* az összes töltés pozitív; *b)* az A és B töltés pozitív, C és D pedig negatív; *c)* a B és C töltés pozitív, az A és D pedig negatív; *d)* a B és D töltés pozitív, az A és C töltés pedig negatív.

89. A 119. ábra 4 db azonos 2C értékű, pontszerű töltést ábrázol. A négyzet oldala 2 m hosszú. Számítsuk ki a töltésrendszer terének potenciálját az A, B, C, D és E pontokban!



118. ábra



119. ábra

29. HOGYAN VISELKEDNEK AZ ERŐVONALAK AZ ELEKTROMOS VEZETŐ FELÜLETE KÖRNYEZETÉBEN?

Tanár: Vigyünk be az elektrosztatikus térbe egy elektromosan vezető anyagból készült testet! Jól tudjuk, hogy az elektromos vezető egy bizonyos fizikai paraméterrel jellemezhető, amelyet elektromos kapacitásnak (vagy egyszerűen kapacitásnak) nevezünk. De vajon elgondolkoztak-e már valaha azon a kérdésen, hogy miért beszélünk éppen a vezetők kapacitásáról, nem pedig a dielektrikumokéról?

Első diák: Én soha nem gondoltam erre.

Tanár: Hogyan tudná meghatározni egy különálló vezető kapacitását?

Első diák: Az ilyen vezető kapacitása azzal a töltésmennyiséggel adható meg, amelyet az adott vezetővel közölve annak potenciálja egységnyi értékkel növekszik.

Tanár: Felhívnám a figyelmét arra, hogy ebben a meghatározásban a potenciálról mint a test jellemző paraméteréről esett szó. Korábban viszont a potenciált a tér paramétereként vizsgáltuk, és mint ilyen, annak értéke pontról pontra változott. A potenciál az elektrosztatikus tér egy adott pontja koordinátáinak a függvénye. Beszélhetünk-e tehát a potenciálról, mint a test egy paraméteréről? Ha igen, akkor miért?

Második diák: Ez megengedett, ha a test elektromosan vezető. Az a helyzet ugyanis, hogy **az elektrosztatikus térbe helyezett vezető minden egyes pontja azonos potenciállal rendelkezik. A vezető önmagában véve egy ekvipotenciális test.**

Tanár: Mivel tudná igazolni az állítását?

Második diák: A vezető szabad töltéseket tartalmaz. Ha tehát a vezető valamely két pontja között potenciálkülönbség létezne, akkor ezen pontok között elektromos áramnak kellene létrejönnie. Világos azonban, hogy ez lehetetlen.

Tanár: Helyes. Azt mondhatjuk, hogy amikor egy vezetőt elektroszta-

tikus térbe helyezünk, akkor a vezetőben található szabad töltések oly módon rendeződnek át, hogy a vezető belsejében a térerősség nulla értékű lesz. Ez pedig egyúttal azt is jelenti, hogy a vezető minden egyes pontja (mind belső, mind pedig felszíni pontja) ugyanazon potenciállal rendelkezik. Az a tény, hogy a vezető minden egyes pontjában azonos potenciál uralkodik, lehetőséget nyújt arra, hogy az egész vezető egységes potenciáljáról beszéljünk. Megjegyezném, hogy a dielektrikum nem tartalmaz szabad töltéseket, ezért a fenti töltésátrendeződés jelen esetben nem is mehet végbe. Apropó, hogyan is megy végbe a tulajdonképpeni töltésátrendeződés a vezetőben?

Második diák: A töltések a felületen koncentrálódnak. A töltéskoncentráció a domború felület görbületi sugarával fordítva arányos. A maximális töltéskoncentráció a hegyes felületeken alakul ki.

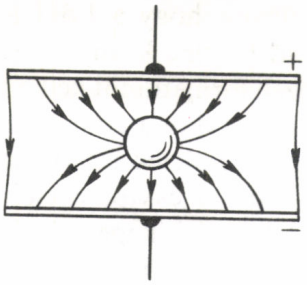
Tanár: Pontosan így van. Éppen ezért jöhet létre a hegyes pontok vagy vékony vezetékek közelében elektromos kisülés. Az ilyen kisülést, amelyet az 1 atom nyomású levegőben az elektromos tér erősen inhomogén jellege okoz, koronakisülésnek nevezzük. Bizonyára gyakran tapasztalták ezt a jelenséget, amikor nagyfeszültségű vezeték alatt elhaladva jellegzetes zümmögő hangot hallottak. Régen a tengerészek féltek a koronakisüléstől. A hajók árbocán észlelt koronakisülést Szent Kelemen tüzének nevezték.

De térjünk vissza az elektrosztatikus térben elhelyezett vezetőhöz. Azt már kiderítettük, hogy ez egy ekvipotenciális test. Ebből következik, hogy a vezető felületének ekvipotenciális felületnek kell lennie. Ennek a következtetésnek a felhasználásával válaszoljanak a következő kérdésre: hogyan viselkednek az elektrosztatikus tér erővonalai a vezető felülete környezetében?

Második diák: Mivel az erővonalak mindig merőlegesek az ekvipotenciális felületre, ezért azoknak a vezető felületére merőlegesen kell abba „beleütközni".

Tanár: Sajnos a vizsgázók ezt gyakran nem tudják. Gondolom, nem jelent különösebb nehézséget teljesíteni kérésemet: rajzolják fel egy párhuzamos síkkondenzátor terében uralkodó erővonalakat, ha a kondenzátor két lapja között egy félgömböt helyeztünk el. Ez a kérdés általában komoly gondot okoz a felvételizőknek.

Második diák: Az erővonalaknak a síkkondenzátor lapjaira és a vezető felületére is merőlegesen kell irányulniuk. Ezért az erővonalak elhelyezkedése a 120. ábrán bemutatott módon fog alakulni.



120. ábra

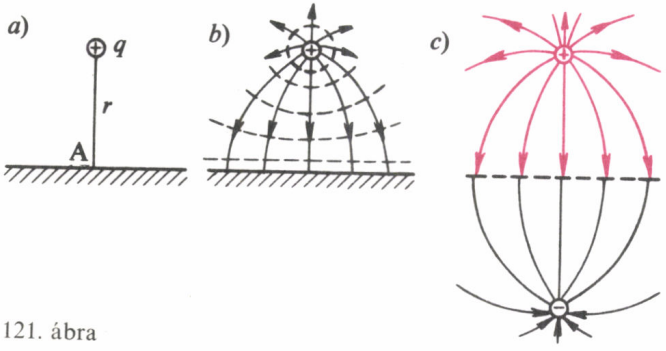
Tanár: Helyesen ábrázolta. Nem értem, egyes diákok miért rajzolják úgy ezt az ábrát, hogy az erővonalak megkerülik a vezetőt. Most pedig lássunk egy másik példát! A Föld felületéről r távolságra egy $+q$ pontszerű töltés helyzkedik el. A megosztás következtében ez a Földben egy ellentétes előjelű töltést kelt. Ennek eredményeként a töltés és a Föld között elektromos vonzóerő lép fel. Számítsuk ki ezt az erőt. Javaslom, hogy mindketten külön próbálják átgondolni a feladatot.

Első diák: A Földben indukált töltésnek megegyező nagyságúnak kell lennie $+q$-val. Ebből pedig a keresett erő értéke: q^2/r^2.

Második diák: Én ezzel nem értek egyet. Társam azt feltételezte, hogy a Földben indukált töltés egyetlen pontban koncentrálódik (lásd a 121. *a)* ábra A pont). A valóságban azonban ez az indukált töltés nem koncentrálódik egyetlen pontban, hanem megoszlik a Föld felszínén. Ezért már előre kijelenthetjük, hogy a keresett erő q^2/r^2 értéknél kisebb lesz.

Tanár: Teljesen egyetértek Önnel. Hogyan tudnánk mégis kiszámítani a töltés és a Föld között fellépő vonzóerőt?

Második diák: Én úgy gondolom, hogy a töltés és a Föld felülete



121. ábra

közötti teret kell megvizsgálnunk. Világos, hogy a Föld felszíne egy ekvipotenciális felület, tehát a Föld felszíne környezetében az ekvipotenciális felületeknek síkhoz közeli formátumot kell ölteniük (ha a Föld felszínét síknak vesszük). Ugyanakkor a pontszerű töltés környezetében viszont az ekvipotenciális felületek szférikusan helyezkednek el. Ennek alapján felrajzolható az ekvipotenciális felületek (helyesebben azok metszetének) közelítő képe. Ebből kiindulva pedig az ismert szabályt alkalmazva felrajzolhatók az erővonalak is. A 121. *b)* ábra már ezt mutatja, ahol az erővonalakat folytonos, az ekvipotenciális felületeket pedig szaggatott vonallal jelöltük.

Tanár: Folytassa kérem! Nem emlékezteti valamire a 121. *b)* ábrán felrajzolt erővonalsereg?

Második diák: Valóban! A kép nagyon hasonlít a két azonos nagyságú, de ellentétes előjelű pontszerű töltés erővonalaira. Felrajzolom ezt is. (121. *c)* ábra) Most már minden világos. A $+q$ töltés környezetében a tér mindkét esetben (121. *b)* és *c)* ábra) azonos módon alakul. A (144) kifejezés alapján ez egyben azt is jelenti, hogy a $+q$ töltésre mindkét esetben ugyanolyan erő hat. Tehát a keresett vonzóerő értéke: $q^2/4r^2$.

Tanár: Helyesen oldotta meg a feladatot. Ebből a példából is jól látható, hogy a tér fogalma mennyire hasznunkra lehet, ha alkotó módon tudjuk azt értelmezni és felhasználni.

30. HOGYAN ÉRTELMEZIK A HOMOGÉN ELEKTROSZTATIKUS TÉRBEN TÖRTÉNŐ ELMOZDULÁST?

Tanár: Tegyük fel, hogy egy töltött részecske homogén elektrosztatikus térben mozog, azaz olyan térben, amelynek minden egyes pontjában azonos nagyságú és irányú E térerősség uralkodik. Ilyen tér található pl. a párhuzamos síkkondenzátor két lapja között. Nem találnak közös vonást a töltött részecske homogén elektrosztatikus térben való mozgása és valamely korábban vizsgált feladattípus között?

Második diák: Nekem úgy tűnik, hogy a feladat igen hasonlít ahhoz az esethez, amikor egy test a gravitációs térben mozog, mert a Földtől viszonylag kis távolságra a nehézségi erőteret is homogénnek tekinthetjük.

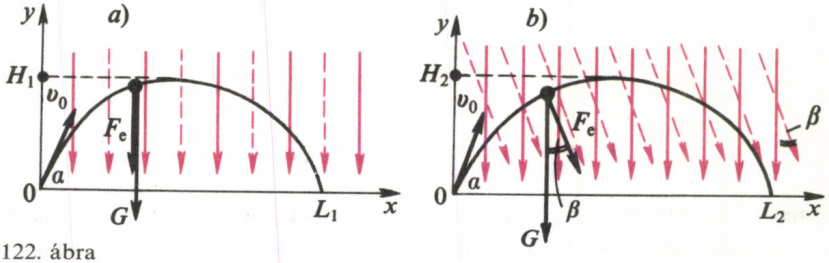
Tanár: Nagyon helyes. És mi a különbség az elektrosztatikus térben és a gravitációs térben való elmozdulás között?

Második diák: Eltérőek a testre ható erők. Az elektrosztatikus térben a testre az $F_e = Eq$ erő hat, amely a töltéssel rendelkező testtel $a_e = Eq/m$ gyorsulást közöl, míg a gravitációs térben a testre ható erő $G = mg$, amely a testnek g gyorsulást ad. Itt m a test tömegét, q pedig az elektromos töltését jelenti.

Tanár: Én azt szeretném, ha minden felvételiző tisztában lenne azzal az egyszerű igazsággal, hogy **kinematikai szempontból teljesen azonos módon megy végbe a testek elmozdulása bármely típusú homogén térben. A különbség csupán abban rejlik, hogy a különféle terekben a testre ható erők értéke eltérő. Egy töltéssel rendelkező test elmozdulása a homogén elektrosztatikus térben ugyanolyan jelleggel bír, mint az egyszerű kődarab mozgása a Föld gravitációs terében.**

Vizsgáljuk meg azt az esetet, ha a test mozgása egyidejűleg két térben – a gravitációs és elektrosztatikus térben – megy végbe! **Egy m tömegű, $+q$ töltésű testet a vízszintessel α szöget bezáró irányban v_0 kezdősebességgel eldobunk. A test mozgása a gravitá-**

ciós erőtérben, ugyanakkor az E térerősségű homogén elektrosztatikus térben játszódik le. Mindkét tér erővonalai függőlegesen lefelé irányulnak (122. *a)* ábra). Számítsuk ki a t_1 repülési időt, az L_1 repülési távolságot és a H_1 maximális emelkedési magasságot!



122. ábra

Második diák: A testre két erő hat: a $G = mg$ nehézségi erő és az $F_e = Eq$ elektrosztatikus erő. Jelen esetben a két erő párhuzamosan hat. Az 5. órán ismertetett esethez hasonlóan felbontom a v_0 kezdeti sebességvektort két összetevőjére...

Tanár: (közbevág): A megoldás menetét ugyanolyannak kívánja választani, mint az 5. óra hasonló feladatában volt?

Második diák: Igen, legfeljebb lerövidítve.

Tanár: Erre nincs szükség, közvetlenül fel lehet használni a (15) és (17) egyenleteket. Képzeljük el, hogy a test most egy „erősebb" gravitációs térben mozog, ahol a gyorsulás értéke a $g+Eq/m$ összeggel egyenlő. A (15) és (17) egyenletekben hajtsuk végre a következő cserét:

$$g \to \left(g+\frac{Eq}{m}\right), \tag{154}$$

és akkor rögtön megkapjuk a keresett értékeket:

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g+E\frac{q}{m}}, \tag{155}$$

$$L_1 = \frac{v_0^2 \sin\alpha}{g+E\frac{q}{m}}, \tag{156}$$

$$H_1 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2\left(g+E\frac{q}{m}\right)}. \tag{157}$$

Első diák: Egy dolgot nem értek. Az 5. órán ismertetett feladathoz képest itt a testre még plusz hat egy F_e erő. Ez az erő függőleges irányú, tehát nem hat a test vízszintes elmozdulására. Miért van mégis, hogy esetünkben megváltozott az L_1 repülési távolság?

Tanár: A repülési távolság a repülési időtől függ, amelyet viszont a test függőleges irányú elmozdulása szab meg. Most pedig kissé megváltoztatjuk a feladatot:

az elektrosztatikus tér erővonalai most zárjanak be a függőlegessel β szöget (122. *b)* ábra). Számítsuk ki most is a t_2 repülési időt, az L_2 repülési távolságot és a H_2 emelkedési magasságot.

Első diák: Először az F_e erőt függőleges ($F_e \cos \beta$) és vízszintes ($F_e \sin \beta$) irányú összetevőire bontom fel. Ekkor a feladat arra az 5. órán ismertetett esetre emlékeztet, amikor a repülés hátszéllel ment végbe. A szél erejének itt az $F_e \sin \beta$ összetevő felel meg.

Tanár: Eddig helyes. Csak arra kérem, ne feledje, hogy az említett esettől eltérően, itt a függőleges erő értéke más lesz, nevezetesen $mg + F_e \cos \beta$.

Első diák: Felhasználom a (15), (16) és (19) kifejezéseket, amelyekben a következő cserét hajtom végre:

$$g \to \left(g + \frac{Eq}{m} \cos \beta\right),$$

$$\frac{F}{Mg} \to \frac{Eq \sin \beta}{mg + Eq \cos \beta}. \tag{158}$$

Ez után már közvetlenül kapom a keresett értékeket:

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g + \frac{Eq}{m} \cos \beta}, \tag{159}$$

$$L_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g + \frac{Eq \cos \beta}{m}} \left[1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha (Eq \sin \beta)}{mg + Eq \cos \beta}\right], \tag{160}$$

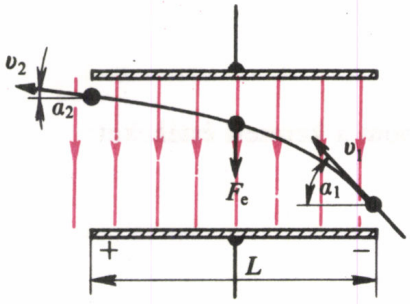
$$H_2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\left(g + \frac{Eq}{m} \cos \beta\right)}. \tag{161}$$

Tanár: Minden eredménye pontos. Sajnos a felvételizők nagy része nem tud párhuzamot vonni a gravitációs térben és a homogén elektrosztatikus térben történő mozgás között, ezért tűnik számunkra a fentihez hasonló feladat rendkívül nehéznek.

Első diák: Korábban mi nem tanultunk ilyen eseteket. Én csak olyan feladattal találkoztam, amelyben az elektron mozgását kellett vizsgálni egy párhuzamos síkkondenzátor lapjai között, és ott a gravitációs térnek az elektronra gyakorolt hatása elhanyagolható volt. Emlékszem, hogy ennek ellenére elég nehéznek tűnt számomra a feladat.

Tanár: Az összes ilyen feladat a 122. *a)* ábrán bemutatott példa egyedi esetének tekinthető, mivel az elektronnak a síkkondenzátor lemezei között való elmozdulásakor elhanyagolható a gravitációs tér hatása. Nézzünk meg mi is egy ilyen példát!

Egy elektron v_1 kezdősebességgel lép be a párhuzamos síkkondenzátor belsejébe a kondenzátor lapjaival α_1 szöget bezáró irányban, és azokkal α_2 szöget bezáró irányban távozik (123. ábra). A kondenzátor lapjainak hossza: L. Számítsuk ki a kondenzátor terének E térerősségét és az elektron kinetikus energiáját a kondenzátorból való kilépés pillanatában, ha az elektron m tömegét és q töltését ismertnek vesszük.



123. ábra

Jelöljük az elektron sebességét a kondenzátorból való kilépés pillanatában v_2-vel. A lemezekkel párhuzamos irányban az elektron egyenletes sebességgel mozog, ebből meghatározható a kondenzátor belsejében tartózkodás T ideje:

$$T = \frac{L}{v_1 \cos \alpha_1} .$$

Az elektron kezdeti és végsebességének a lemezekre merőleges irányú összetevői az egyenletesen lassuló mozgás ismert kinematikai összefüggései szerint állnak egymással kapcsolatban:

$$v_2 \sin \alpha_2 = v_1 \sin \alpha_1 - \frac{F_e}{m} T = v_1 \sin \alpha_1 - \frac{EqL}{mv_1 \cos \alpha_1} .$$

Mivel a sebességnek a lemezekkel párhuzamos összetevője nem változik ($v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2$), a fenti egyenlet a következő alakra hozható:

$$v_1 \cos \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = v_1 \sin \alpha_1 - \frac{EqL}{mv_1 \cos \alpha_1} .$$

Innen kifejezhetjük a kondenzátor terének erősségét:

$$E = \frac{(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) m v_1^2 \cos^2 \alpha_1}{qL} . \tag{162}$$

Az elektron kinetikus energiája pedig a kilépés pillanatában:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_2} . \tag{163}$$

Minden világos ebben a feladatban?

Első diák: Igen, én most már értem, hogyan kell megoldani az ilyen típusú feladatokat.

Tanár: Érdekesek a párhuzamos síkkondenzátor belsejében elhelyezett fonálingával kapcsolatos feladatok is. Lássunk egy ilyent!

Egy m tömegű, q töltésű gömb egy vízszintesen fekvő párhuzamos síkkondenzátor belsejében l hosszúságú vékony fonálon függ. A kondenzátor térereje E, az erővonalak pedig függőlegesen lefelé irányulnak (124. *a)* ábra). Számítsuk ki az inga lengési idejét!

Második diák: Mivel jelen esetben az elektrosztatikus és a gravitációs tér erővonalai azonos irányba mutatnak, ezért alkalmazható a matematikai ingára korábban kapott (75) egyenlet azzal a módosítással, hogy abban a g gyorsulást a $(g + Eq/m)$ összeggel helyettesítjük. Tehát az ingák keresett lengési ideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{Eq}{m}}} . \tag{164}$$

Tanár: Pontosan így van. Ugye, mennyire egyszerű a feladat, ha felfedezzük a homogén elektrosztatikus térben, illetve a gravitációs térben végbemenő mozgás közötti párhuzamot?

Első diák: A (164) kifejezés szerkezetileg hasonló a (77)-hez.

Tanár: A megjegyzése helytálló. A kettő között az a különbség, hogy a (77) kifejezésben a g gyorsulás értékét növelő tényező annak az egész rendszernek a gyorsulásából származott, amelyben az inga lengését vizsgáltuk, míg a (164) kifejezésben egy további kölcsönhatási forma növeli a g értékét.

Hogyan változik meg a (164) kifejezés, ha a kondenzátor lemezein megváltoztatjuk a töltések előjelét?

Első diák: Ebben az esetben a lengési időt a következő kifejezés adja meg:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - \frac{Eq}{m}}} \,. \tag{165}$$

Tanár: Helyes. És mi történik ebben a helyzetben az ingával, ha a kondenzátor térerejét fokozatosan növeljük?

Első diák: A lengési idő is fokozatosan nő, és a végtelenhez tart akkor, ha $E = mg/q$. Ha E értékét tovább növeljük, akkor a fonál végét már a felső helyett az alsó lemezhez kell rögzíteni.

Tanár: És milyen kifejezés adja meg a lengési időt ebben az esetben?

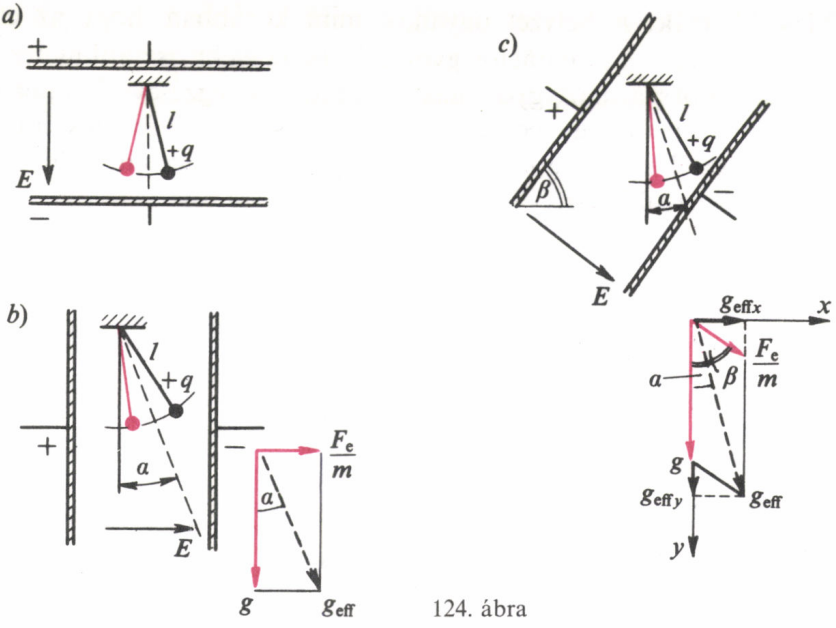
Első diák: A következő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\frac{Eq}{m} - g}} \,. \tag{166}$$

Tanár: Így van. Most pedig nehezítsük meg a feladatot!

Vizsgáljuk meg egy elektromosan töltött inga lengését a párhuzamos síkkondenzátor belsejében, ha a kondenzátor lapjai függőlegesen állnak (124. *b)* ábra). Ekkor a g gyorsulás és az F_e/m egymásra merőlegesek.

Számítsuk ki most is az inga lengési idejét, valamint azt az α szöget, amelyet az inga egyensúlyi helyzetében a függőlegessel bezár.



124. ábra

Második diák: A feladat megoldása során figyelembe veszem a jelen és a 12. órán már elhangzott észrevételeket. Ennek alapján közvetlenül az alábbi következtetésre jutok: 1. a lengési időt a g_{eff} effektív gyorsulással fejezhetjük ki. Az effektív gyorsulást a gravitációs és az elektrosztatikus tér hatásából származó gyorsulás vektorális összegzése szolgáltatja; 2. az inga egyensúlyi helyzete egybeesik a fenti effektív gyorsulásvektorral (a 124. *b)* ábrán ezt az irányt szaggatott vonal jelzi). Egyenletekkel felírva pedig:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{Eq}{m}\right)^2}}}, \tag{167}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Eq}{mg} \tag{168}$$

Tanár: Nagyon helyes. Azt hiszem, ezek után nem okoz különösebb gondot az általános eset vizsgálata sem.

Számítsuk ki a fonálinga lengési idejét és az egyensúlyi helyzete, valamint a függőleges irány által bezárt α szöget, ha a kondenzátor lemezei a vízszintessel β szöget alkotnak (124. *c)* ábra).

Második diák: A helyzet ugyanaz, mint korábban, hogy az effektív gyorsulást a gravitációs gyorsulás és az elektrosztatikus tér vonzerejéből származó gyorsulás vektoriális összegzésével kapjuk, ennek iránya pedig egybeesik az inga egyensúlyi helyzetének irányával. g_{eff} értékét a trigonometriában használatos cosinustétel alapján határozzuk meg:

$$g_{\text{eff}}^2 = g^2 + \left(\frac{Eq}{m}\right)^2 + 2g\frac{Eq}{m}\cos\beta.$$

A lengési idő tehát:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{Eq}{m}\right)^2 + 2g\frac{Eq}{m}\cos\beta}}}, \tag{169}$$

$\operatorname{tg}\alpha$ értéke pedig:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{g_{\text{eff}\,x}}{g_{\text{eff}\,y}} = \frac{\frac{Eq}{m}\sin\beta}{g + \frac{Eq}{m}\cos\beta}. \tag{170}$$

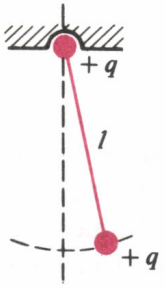
Tanár: Pontos eredményeket kapott. Világos, hogy $\beta = 0$ esetén a kifejezésnek egybe kell esni a vízszintes irányú kondenzátorra, $\beta = 90°$ esetén pedig a függőlegesre kapott értékkel. Ellenőrizzük ezt le!

Második diák: Ha $\beta = 0$, akkor $\cos\beta = 1$, és $\sin\beta = 0$. Ekkor a (169) kifejezés egybeesik a (164)-gyel, és $\operatorname{tg}\alpha = 0$ (az egyensúlyi helyzet függőleges irányú). Ha viszont $\beta = 90°$, akkor $\cos\beta = 0$, és $\sin\beta = 1$. Ekkor a (169) a (167)-tel esik egybe, a (170) pedig a (168)-cal.

Tanár: Ezzel teljesen kimerítettük az elektromosan töltött inga párhuzamos síkkondenzátor belsejében történő lengésével kapcsolatos feladattípusok tárgyalását. Végül feltennék még egy kérdést:

Számítsuk ki az elektromos töltéssel rendelkező fonálinga lengési idejét, ha a felfüggesztési pontba pontosan ugyanolyan töltött ré-

szecskét helyezünk, mint a fonál végére, (125. ábra). Vigyázat! Itt nincs szó semmiféle kondenzátorról!



125. ábra

Első diák: A Coulomb-törvény értelmében a gömb és a felfüggesztési pont között q^2/l^2 taszítóerő lép fel. Ez az erő q^2/l^2m gyorsulást közöl az ingával. Az inga lengési idejének meghatározására szolgáló kifejezésben ezt a gyorsulást figyelembe kell venni. Az eredmény így alakul:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+\frac{q^2}{l^2m}}}. \qquad (171)$$

Tanár: (Második diákhoz): Egyetért ezzel az eredménnyel?

Második diák: Nem. A (171) kifejezés akkor lenne igaz, ha a q^2/l^2m gyorsulás állandóan függőlegesen lefelé irányulna. A valóságban azonban csak abban a pillanatban irányul lefelé, amikor az inga az egyensúlyi helyzetben halad át. Ebből legalábbis annyi világos, hogy a (171) kifejezés nem helytálló, de a helyes megoldást már nem lennék képes megadni.

Tanár: Már az is jó, hogy felfedezte a (171) kifejezésben rejlő hibát. A feladatban az elektrosztatikus taszítóerő állandóan a fonál irányával esik egybe, tehát azt minden időben a fonál reakcióereje egyenlíti ki. Ebből következik, hogy az elektrosztatikus erő nem vezet az inga lendítőerejének megváltozásához, tehát a lengési időt sem befolyásolja.

Második diák: Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben az inga lengési idejét a töltés nélküli ingára vonatkozó (75) kifejezés adja meg?

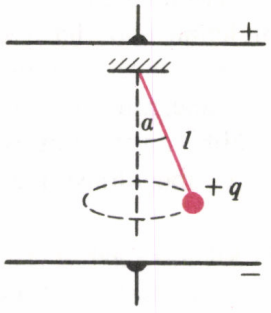
Tanár: Pontosan. Itt ugyanis az elektromos erőtér nem homogén, tehát semmiféle összefüggésbe nem hozható a gravitációs térrel.

Feladatok:

90. Egy elektron a pozitív töltésű lemeztől 4 cm távolságon lép be a párhuzamos síkkondenzátorba, annak lapjaival párhuzamos irányban. A lapok hossza 15 cm. Mekkora t idő múlva ütközik az elektron a kondenzátor lemezébe, ha az elektromos térerősség $E = 500$ V/m? Mekkora az a legkisebb v_0 sebesség, amellyel az elektronnak a belépéskor rendelkeznie kell ahhoz, hogy a lemez érintése nélkül túlhaladhasson a kondenzátoron? Az elektron tömege: $m = 9 \cdot 10^{-28}$ g, töltése: $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ CGS egység.

91. A párhuzamos síkkondenzátorba, lapjaival párhuzamosan $v = 3 \cdot 10^6$ m/s sebességgel lép be egy elektron. Számítsuk ki a kondenzátor térerősségét, ha ismert, hogy az elektron a lemezekhez képest $\alpha = 30°$-os szögben lép ki, a lemezek hossza $l = 20$ cm, ismert továbbá az elektron tömege és töltése (lásd 90. feladat).

92. Az E térerősségű párhuzamos síkkondenzátor belsejében egy l hosszúságú fonálra felfüggesztett, m tömegű, $+q$ töltésű gömb egyenletes körmozgást végez (126. ábra). A fonál a függőlegessel α szöget zár be. Számítsuk ki a fonálra ható T feszítőerőt és a gömb W_k kinetikai energiáját!



126. ábra

93. Egy m_1 és egy m_2 tömegű, $+q_1$, illetve $+q_2$ töltéssel rendelkező gömböt vékony fonállal összekötünk, majd a fonalat egy csigán átvetjük. Számítsuk ki a gömbök gyorsulását és a fonálra ható T feszítőerőt, ha az egész rendszer egy homogén E elektromos térerősségű térben helyezkedik el, amelyben az erővonalak függő-

legesen lefelé irányulnak. A töltött gömbök közötti kölcsönhatást elhanyagolhatjuk.

94. Egy E térerősségű homogén elektrosztatikus térben, amelyben az erővonalak függőlegesen lefelé mutatnak, az l hosszúságú fonálra rögzített m tömegű, $+q$ töltésű gömb a függőleges síkban képes körmozgást végezni. Mekkora vízszintes irányú v sebességet kell a gömbbel a felső helyzetben közölni ahhoz, hogy az alsó helyzetben a fonálra ható feszítőerő a gömb nehézségi erejének tízszerese legyen?

31. TUDNAK-E BÁNNI A COULOMB-TÖRVÉNNYEL?

Tanár: Beszélgessünk egy kicsit Coulomb törvényéről és a vele kapcsolatos feladatokról! Mindenekelőtt azt kérném, hogy fogalmazzák meg nekem a Coulomb-törvényt.

Első diák: Két töltött részecske a töltések szorzatával egyenesen, és a közöttük levő távolság négyzetével fordított arányban álló erővel hat egymásra.

Tanár: Ez a megfogalmazás pontatlan, mert hiányos.

Második diák: Bizonyára ki kell még egészíteni azzal, hogy a hatóerő fordítva arányos a közeg ε dielektromos állandójával?

Tanár: Ez a kiegészítés természetesen helytálló, de nem ez a leglényegesebb. Ismét megfeledkeznek arról, hogy az erő vektormennyiség. Tehát a nagysága mellett mindig fel kell tüntetni az irányát is. (Emlékezzenek csak Newton második törvényével kapcsolatban a 4. órán elmondottakra!)

Első diák: Igen, értem. Tehát a fogalmazást ki kell egészíteni azzal, hogy az az erő, amellyel a két töltés hat egymásra, a töltéseket összekötő egyenes mentén hat?

Tanár: Ez igaz, de még mindig kevés, hiszen az egyenes mentén is két irány létezik!

Első diák: Hozzá kell még tenni, hogy az azonos előjelű töltések taszítják, a különböző előjelűek pedig vonzzák egymást.

Tanár: Helyes. Ha most az elmondottakat mind egybegyűjtik, akkor megkapják a Coulomb-törvény megfogalmazását.

Nem árt azt sem hangsúlyozni, hogy ez pontszerű töltésekre vonatkozik.

Második diák: Felírható-e a Coulomb-törvényre olyan kifejezés, amely az összes információt tartalmazza? Mert hiszen a szokásos

$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2} \tag{172}$$

nem nyújt információt az erő irányáról.

Tanár: A Coulomb-törvényre felírható ilyen kifejezés. Ehhez csupán az szükséges, hogy előre eldöntsük: pontosan melyik erő érdekel bennünket. Tegyük fel, hogy arra az erőre vagyunk kíváncsiak, amellyel a q_1 töltés hat a q_2-re (és nem fordítva!). Vegyük fel a koordináta-rendszer origóját a q_1 töltésen. Az origóból a q_2 töltéshez húzzuk meg az **r** vektort. Ezt a q_2 töltés rádiuszvektorának nevezzük. Ekkor a Coulomb-törvény szabatos matematikai alakja a következő kifejezéssel írható fel:

$$\mathbf{F} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^3}\mathbf{r}, \tag{173}$$

ahol a k együttható értéke a választott mértékegységtől függ.

Első diák: De miért van az, hogy ebben a kifejezésben a hatóerő nem a töltések közötti távolság négyzetével, hanem annak köbével fordítva arányos?

Tanár: Szó sincs ilyesmiről! Ugyanis az $\mathbf{r}/r$ vektor számértéke egy (dimenzió nélküli) egység. Ezt egységvektornak nevezik, és mindössze az irány jelölésére szolgál.

Első diák: Tehát ha a Coulomb-törvényt kapom kérdésként, elegendő, ha felírom a (173) kifejezést és semmi egyébre nincs szükség?

Tanár: Mindössze meg kell magyarázni a kifejezésben szereplő jelölések értelmezését.

Első diák: És ha nem a (173), hanem a (172) kifejezést írom fel?

Tanár: Akkor szóban kell elmondani, hogy a hatóerők mely irányban mutatnak.

Első diák: És a (173) kifejezés mily módon veszi azt figyelembe, hogy a töltések vonzzák vagy taszítják egymást?

Tanár: Ha a töltések azonos előjelűek, akkor a $q_1 q_2$ szorzat előjele pozitív, tehát az **F** vektor párhuzamos lesz az **r** vektorral. **F** pedig a q_2 töltésre ható erőt jelenti, tehát q_1 taszítja a q_2-t. Ha azonban a töltések előjele eltérő, a $q_1 q_2$ szorzat előjele negatív és az **F** erő, valamint az **r** vektorok antiparalel irányúak, tehát q_1 vonzza q_2-t.

Első diák: Legyen szíves elmondani Tanár Úr, mit kell tudnunk a k együtthatóról.

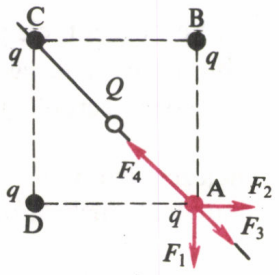
Tanár: Ez az együttható a választott mértékegységtől függ. CGS mértékegységben $k = 1$, az SI* rendszerben $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, ahol $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{Cm^{-2}N^{-1}}$.

Nézzünk meg néhány példát Coulomb törvényére!

1. Példa: **Négy azonos töltést egy négyzet csúcspontjaiban helyezünk el. Mekkora nagyságúnak kell lennie a négyzet középpontjában elhelyezett, ellentétes előjelű Q töltésnek, hogy az az egész rendszert egyensúlyban tartsa?**

Első diák: A rendszerben öt töltésünk van – négy ismert és egy ismeretlen. Mivel a rendszer egyensúlyban van, ezért az öt közül bármely töltésre ható erők eredője nulla. Tehát meg kell vizsgálnunk mind az öt töltés egyensúlyi feltételeit.

Tanár: Ez teljesen fölösleges munka lenne. Könnyen beláthatjuk ugyanis, hogy a Q töltés az értékétől teljesen függetlenül egyensúlyban marad a geometriai helyzeténél fogva. Tehát ennek a töltésnek az egyensúlyi feltételei semmiféle információt nem nyújtanak számunkra. A fennmaradó négy töltés pedig a négyzet szimmetriája miatt teljesen ekvivalens egymással. Tehát elegendő ezek közül egyetlen – bármelyik – töltést megvizsgálnunk. Válasszuk pl. a 127. ábra A pontjában elhelyezkedő töltést. Milyen erők hatnak erre a töltésre?



127. ábra

Első diák: A B pontban levő töltés oldaláról az F_1, a D pontban levőtől az F_2 erő, végül pedig a négyzet középpontjában elhelyezett, ismeretlen értékű töltés hatóereje.

Tanár: Szabad legyen megkérdeznem, miért nem vette számításba a C pontban levő töltést?

* SI: System International – nemzetközi mértékegység-rendszer. – *A szerk.*

Első diák: De hiszen azt „elhatárolja" a négyzet középpontjában elhelyezett töltés.

Tanár: Ez elég primitív tévedés. Jegyezzék meg kérem, hogy egy töltésrendszerben minden egyes töltésre kivétel nélkül hat a rendszer összes többi töltése. Tehát figyelembe kell venni az A pontban elhelyezkedő töltésre a C pont töltése részéről ható F_3 erőt is. A végső helyzetet a 127. ábra szemlélteti.

Első diák: Tovább már igen egyszerű a megoldás. Kiválasztom az AB irányt és az A pont töltésre ható összes erőt erre az irányra vetítem. Az erők vetülete algebrai összegének nullával kell egyenlőnek lennie, azaz:

$$F_4 = 2F_1 \cos 45° + F_3.$$

Ha a négyzet oldalait a-val jelöljük, az egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{Qq}{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{2}\frac{q^2}{a^2} + \frac{q^2}{2a^2}.$$

Ebből az ismeretlen töltés értéke:

$$Q = \frac{q}{4}(2\sqrt{2}+1).$$

Tanár: Helyes az eredmény. És mit gondolnak: stabilis lesz ennek a töltésrendszernek az egyensúlyi helyzete?

Második diák: Nem, labilis lesz. Elegendő valamelyik töltésnek kissé kimozdulnia helyzetéből, az egész rendszer azonnal mozgásba jön és összeomlik.

Tanár: Igaza van. Az a helyzet, hogy **mozdulatlan töltésekből egyáltalán nem lehetséges stabil egyensúlyban levő konfigurációt létrehozni.**

2. sz. Példa: **Két azonos tömegű, sugarú és elektromos töltésű gömböt, amelyek egyenlő hosszúságú fonalakon egy felfüggesztési pontban vannak rögzítve, egy ε dielektromos állandójú, ϱ_0 sűrűségű folyékony dielektrikumba bocsátunk. Mekkorának kell lennie a gömbök sűrűségének ahhoz, hogy a két fonál mind a levegőn, mind a dielektrikumban azonos szöget zárjon be?**

Második diák: A fonalak a testek (gömbök) Coulomb-féle taszítóereje következtében térnek ki. Jelöljük F_{e1}-gyel a Coulomb-féle taszítóerőt levegőben, F_{e2}-vel pedig a folyékony dielektrikumban.

Tanár: Miben különbözik ez a két erő egymástól?

Második diák: Mivel a feladat szerint a fonalak mindkét esetben azonos szöget zárnak be, ezért a testek közötti távolság is azonos. Tehát az F_{e1} és F_{e2} erők eltérését csak a dielektromos állandó befolyásolja:

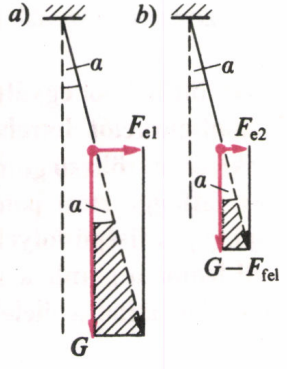
$$F_{e1} = \varepsilon F_{e2}. \tag{174}$$

Nézzük meg azt a konkrét esetet, amikor a testek a levegőben találhatók! A testek egyensúlyi helyzetéből következik, hogy az F_{e1} erő és a G nehézségi erő összegének (vektoriális összegének!) a fonál mentén kell hatnia, mert ellenkező esetben azt a fonál reakcióereje nem lenne képes egyensúlyban tartani (128. *a)* ábra). Ebből következik, hogy:

$$\frac{F_{e1}}{G} = \operatorname{tg} \alpha,$$

ahol: α – a fonál és a függőleges által bezárt szög. Ha a test a folyadékban található, akkor az F_{e1} erőt az F_{e2}-vel, a G nehézségi erőt pedig a $(G - F_{fel})$ különbséggel kell helyettesítenünk, ahol: F_{fel} – a felhajtóerő. Az új erők hányadosának azonban továbbra is $\operatorname{tg} \alpha$-val kell egyenlőnek lennie (128. *b)* ábra):

$$\frac{F_{e2}}{G - F_{fel}} = \operatorname{tg} \alpha.$$



128. ábra

A két utóbbi egyenletből:

$$\frac{F_{e1}}{G} = \frac{F_{e2}}{G - F_{fel}} .$$

Behelyettesítve ebbe a (174) kifejezést, illetve a $G = Vg\varrho$ és az $F_{fel} = Vg\varrho_0$ értékeket, kapjuk, hogy:

$$\frac{\varepsilon}{\varrho} = \frac{1}{\varrho - \varrho_0},$$

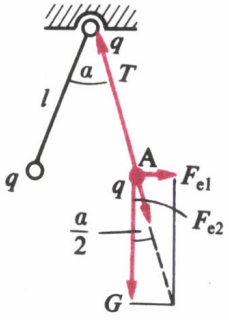
illetve az ismeretlen sűrűség értéke:

$$\varrho = \varrho_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}.$$

Tanár: A megoldás helyes.

3. Példa: **Két azonos töltésű, m tömegű fémgömböt l hosszúságú fonalakkal egy ponthoz függesztünk fel. A felfüggesztési pontban egy, az első kettővel azonos töltésű harmadik gömb található (129. ábra). Számítsuk ki a gömbök q töltését, ha az egyensúlyi helyzetben a fonalak egymással α szöget zárnak be.**

Második diák: Vizsgáljuk meg az A gömböt. Erre a testre a 129. ábrán feltüntetett négy erő hat. Mivel a test egyensúlyi helyzetben van, ezért az erőket két irányban összetevőikre bontom, majd...



129. ábra

Tanár: (közbevág): Jelen esetben egyszerűbb eljárás is kínálkozik. A felfüggesztési pontban elhelyezett töltés részéről ható erő semmiféle hatást nem gyakorol a fonál egyensúlyi helyzetére, ugyanis az F_{e2} erő a fonál mentén hat és a fonál reakcióereje bármely helyzetben kiegyenlíti azt. Tehát a feladat megoldása során a felfüggesztési pontban levő töltést teljesen figyelmen kívül lehet hagyni. A felvételizők ezt rendszerint nem értik.

Második diák: Tehát az F_{e2} erőt nem vesszük számításba. Mivel az F_{e1} és a G vektorális összegének a fonál mentén kell hatnia, ebből azt kapjuk, hogy:

$$\frac{F_{e1}}{G} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{175}$$

Tanár: Figyeljék meg, hogy a (175) kifejezés nem függ attól, hogy a felfüggesztési pontban van-e töltés!

Második diák: Behelyettesítve (175)-be az

$$F_{e1} = \frac{q^2}{4l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

értéket:

$$\frac{q^2}{4l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ebből az ismeretlen töltés értéke:

$$q = 2l \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{mg \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Tanár: Ez a helyes eredmény.

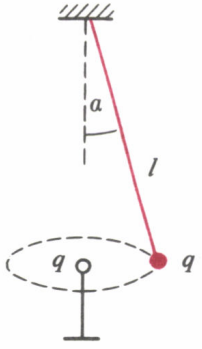
Első diák: A felfüggesztési pontban elhelyezett töltés hatása egyáltalán, milyen esetben jelentős?

Tanár: Akkor, ha például a fonálra ható feszítőerőt kell meghatározni.

Feladatok:

95. Egy szabályos hatszög csúcspontjaiban azonos $+q$ töltések helyezkednek el. Mekkora töltést kell a hatszög középpontjába helyezni, hogy az egész rendszer egyensúlyban legyen?

96. Egy l hosszúságú fonálra felfüggesztett, m tömegű, q töltésű félgömb egy ugyanolyan értékű mozdulatlan töltés körül forog (130. ábra). A fonál és a függőleges által bezárt szög α. Számítsuk ki az egyenletes körmozgás ω szögsebességét és a fonálra ható T feszítőerőt.



130. ábra

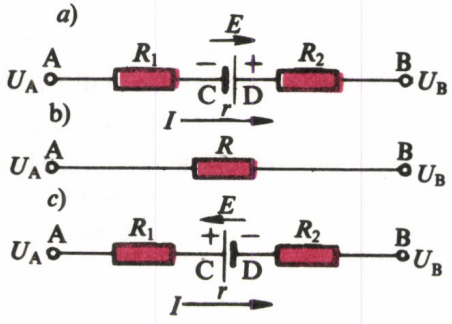
97. Egy l hosszúságú fonálra felfüggesztett, m tömegű, q töltésű fémgömbnek a függőleges síkban van lehetősége körmozgást végezni. A kör középpontjában egy ugyanilyen előjelű és nagyságú töltés található. Mekkora az a legkisebb vízszintes irányú v sebesség, amelyet a testtel az alsó helyzetben közölnünk kell, hogy az egy teljes körfordulatot tegyen meg?

32. ISMERIK JÓL OHM TÖRVÉNYÉT?

Tanár: Ismeri Ohm törvényét?

Első diák: Természetesen. Szerintem mindenki tudja az Ohm-törvényt. Az egész fizikában ez a legkönnyebb kérdés.

Tanár: Hát akkor lássuk! A 131. *a)* ábra egy elektromos áramkör egy bizonyos szakaszát mutatja be. A rajzon E – az elektromos erő, amely jobbra mutat, R_1 és R_2 – ellenállások; r – az áramforrás belső ellenállása; U_A és U_B pedig az adott szakasz végpontjainak potenciáljai. Az áram iránya az adott szakaszon balról jobbra mutat. Számítsuk ki ezt az I áramot!



131. ábra

Első diák: De hiszen ez egy nyitott áramkör!

Tanár: Én egy nagy áramkör bizonyos szakaszának vizsgálatára kértem. A teljes áramkört ismerjük. De nem is szükséges ismernünk, mivel a szakasz végpontjain a potenciálok adottak.

Első diák: A középiskolában mi csak zárt áramköröket vizsgáltunk. Ezekre az Ohm-törvény a következő kifejezéssel írható fel:

$$I = \frac{E}{R+r}. \tag{176}$$

Tanár: Téved. Nyitott áramkörök vizsgálatával is foglalkoztak. Emlékezzenek vissza egy olyan megfogalmazásra, hogy: az áramkör egy bizonyos szakaszán átfolyó áram a szakasz végpontjain mért feszültségkülönbség és a szakasz ellenállásának hányadosával egyenlő.

Első diák: De vajon ez egy áramköri szakasz?

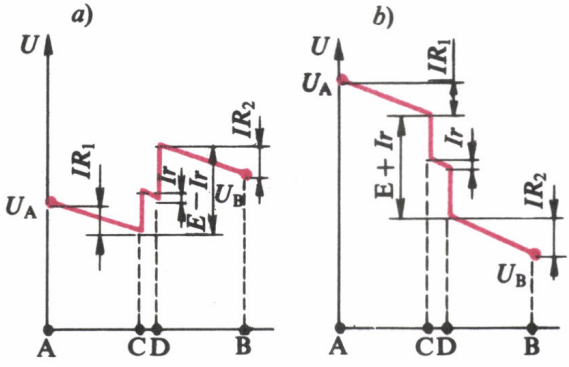
Tanár: Természetesen. Egyszerűsítve a 131. *b)* ábra szemlélteti. Erre a szakaszra az Ohm-törvény a következő alakban írható fel:

$$I = \frac{U_A - U_B}{R} . \qquad (177)$$

Korábban a $U_A - U_B$ helyett egyszerűen a „feszültség" kifejezést használták, és azt U-val jelölték.

Első diák: Én mégis azt állítom, hogy a 131. *a)* ábrán bemutatott nyitott körhöz hasonlót mi nem tárgyaltunk.

Tanár: Azzal zárhatjuk le a vitát, hogy ismerik Ohm törvényét arra az egyedi esetre vonakozóan, amikor a zárt vagy nyitott egyszerű áramkör nem tartalmaz elektromos erőforrást. A törvény általános



132. ábra

esetre érvényes alakját viszont nem ismerik. Hát akkor tárgyaljuk meg ezt együtt!

A 132. *a)* ábra egy adott áramköri szakaszra bemutatja a potenciálisváltozás képét. Az áram balról jobbra folyik, tehát az A ponttól B-ig a potenciál csökken. Az R_1 ellenállásra jutó potenciálesés IR_1-gyel egyenlő. Továbbhaladva, azt feltételezzük, hogy C és D pontok egy galvánelem elektródái. Ezeken a pontokon a potenciál ugrásszerűen megnő az E elektromos erőnek megfelelő értékkel.

A C és D pontok között a potenciál a galvánelem belső ellenállásán Ir értékkel csökken. Végül a DB szakaszon az R_2 ellenállásra eső potenciálesés: IR_2.

A szakasz összes ellenállására jutó potenciálesésből kivonva az E értéknek megfelelő potenciálnövekedést, megkapjuk a vizsgált áramköri szakasz végpontjain uralkodó potenciálok különbségét:

$$I(R_1+R_2+r)-E = U_A-U_B.$$

Ebből kifejezhetjük az adott szakaszon átfolyó áram értékét:

$$I = \frac{E+(U_A-U_B)}{R_1+R_2+r}. \qquad (178)$$

Figyeljék meg kérem, hogy ebből a kifejezésből közvetlenül jutunk az ismeretes egyedi esetekhez. Az áramforrást nem tartalmazó egyszerű szakaszra a (178) kifejezésbe $E = 0$, és $r = 0$ értéket helyettesítve:

$$I = \frac{U_A-U_B}{R_1+R_2}.$$

értékhez jutunk, amely a (177) kifejezésnek felel meg. Zárt áramkörhöz úgy jutunk, ha a szakasz A és B végpontjait összekötjük, tehát ha $U_A = U_B$. Ekkor

$$I = \frac{E}{R_1+R_2+r},$$

amely viszont a (176) kifejezésnek felel meg.

Első diák: És még egy eredmény: jómagam is meggyőződtem, hogy nem tudom Ohm törvényét!

Tanár: Helyesebben szólva eddig csak egyedi esetekre vonatkozóan ismerte azt.

Tegyük fel, hogy a 131. *a)* ábrán jelölt szakaszon az elem kapocspontjaira egy elegendően nagy belső ellenállású voltmérőt kapcsolunk, tehát a voltmérő zavaró hatása elhanyagolható. Mit mutat ekkor a voltmérőnk?

Első diák: Én úgy tudom, hogy az elem kapocspontjaira kötött voltmérőnek a külső áramkörben létrejött feszültségesést kell mérnie. Jelen esetben azonban ez a külső áramkör nem ismeretes előttünk.

Tanár: A vizsgálódás elvégezhető a külső áramkör ismerete nélkül is. Ha a voltmérőt a C és D pontra kötjük, akkor az az említett két pont közötti potenciálkülönbséget fogja mérni. Ha ezt előrebocsátjuk, így érthető?

Első diák: Eddig igen.

Tanár: Most pedig vessünk egy pillantást a 132. *a)* ábrára. A grafikonból leolvasható, hogy a C és D pontok potenciálkülönbsége $(E - Ir)$. Ha a voltmérő által mutatott értéket U-val jelöljük, akkor felírható:

$$U = E - Ir. \tag{179}$$

Azt javaslom, hogy minden egyebet félretéve, ezt a kifejezést próbálja felhasználni, mivel itt semmiféle külső ellenállás ismerete nem szükséges. Ez különösen értékes előny abban az esetben, ha a külső áramkör már összetettebb. Megjegyzem, hogy a (179) kifejezésből ered egy közismert egyedi eset: ha az áramkört megszakítjuk, tehát ha nem folyik áram ($I = 0$), akkor $U = E$. Vagyis a voltmérő az elektromos erő értékét méri. Érthető minden?

Első diák: Igen, most már értem.

Tanár: Javaslom, hogy az önkontrollt a következő feladattal végezze el, amelyet egyébként a felvételizők elég gyakran nem képesek megoldani.

Egy zárt áramkör n darab, teljesen egyforma sorbakötött elemből áll, amelyek elektromos ereje egyenként E, belső ellenállásuk értéke pedig r. Az összekötő vezeték ellenállását elhanyagolhatjuk. Mit mutat a voltmérőnk, ha azt valamely elem két kapocspontjára kötjük? Most is feltételezzük, hogy a voltmérőn át nem folyik áram.

Első diák: A megoldás az előzőhöz hasonló lesz. A voltmérőnk $U = E - Ir$ értéket fog mutatni. Az Ohm-törvény alapján kiszámíthatjuk az adott zárt áramkörre az áramerősséget: $I = nE/nr = E/r$. Behelyettesítve ezt az értéket, kapjuk: $U = E - E/\mathrm{r} \cdot r = 0$. Tehát a vizsgált esetben a voltmérő mutatója egyáltalán nem fog kitérni.

Tanár: Pontosan ez a helyzet. De ne feledje, hogy egy idealizált esetet vizsgálva kaptuk ezt az eredményt, tehát amikor elhanyagoltuk a vezeték ellenállását és azt feltételeztük, hogy a voltmérő belső ellenállása végtelen. Ne lepődjön meg, ha a gyakorlatban ez kissé másként adódik!

Vizsgáljuk meg továbbá azt az esetet, amikor az adott szakaszon az áram és a szakaszon levő elektromotoros erő ellentétes irányba mutatnak. Az esetet a 131. *c)* ábra szemlélteti. Ábrázolja kérem a potenciál változását e szakasz mentén!

Első diák: Vajon lehetséges, hogy az áram az elektromotoros erővel szemben folyjon?

Tanár: Ne feledje el, hogy az ábra az áramkörnek csak egy szakaszát mutatja. Ez az áramkör egyéb áramforrásokat is tartalmazhat, amelyek a vizsgált szakaszon kívül esnek, és ezek hatására előfordulhat, hogy az adott szakaszon az áram valóban az elektromotoros erővel ellentétes irányban folyik.

Első diák: Így már értem. Mivel az áram balról jobbra folyik, az A és C pont között a potenciálesés értéke IR_1 lesz. Viszont az elektromotoros erő az árammal ellentétes irányú, ezért a C és D pontokban észlelhető potenciálugrás most nem növeli, hanem csökkenteni fogja a potenciált. A C és D pontok között a potenciál Ir, a D és B pontok között pedig IR_2 értékkel esik.

Végeredményként a 132. *b)* ábrán bemutatott grafikont kapjuk.

Tanár: És hogyan írható fel erre az esetre Ohm-törvénye?

Első diák: Az Ohm-törvény most a következő kifejezéssel adható meg:

$$I = \frac{(U_A - U_B) - E}{R_1 + R_2 + r}. \tag{180}$$

Tanár: Helyes. És mit fog mutatni a voltmérőnk?

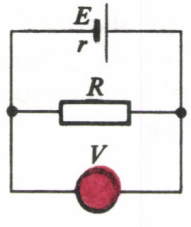
Első diák: A 132. *b)* ábráról leolvasható, hogy

$$U = E + Ir \tag{181}$$

értéket fog mutatni.

Tanár: Nagyon helyes. Térjünk át a következő feladatra!

Adva van a 133. ábrán bemutatott áramkör. Ismert $r = 1\ \Omega$, $R = 10\ \Omega$ és a voltmérő belső ellenállása: $R_V = 200\ \Omega$. Számítsuk ki



133. ábra

a voltmérő által okozott relatív mérési hibát ahhoz képest, ha a voltmérő ellenállása végtelen lenne, tehát azon keresztül egyáltalán nem folyna áram.

Jelöljük a valódi voltmérő által mért értéket U-val, a végtelen ellenállású voltmérő által mért értéket pedig U_∞-nel. A keresett relatív hiba értéke:

$$f = \frac{U_\infty - U}{U} = \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right). \tag{182}$$

Behelyettesítve ebbe az

$$U_\infty = \frac{E}{R+r}R, \tag{183}$$

és az

$$U = \frac{E}{r + \dfrac{RR_v}{R+R_v}} \cdot \frac{RR_v}{R+R_v} \tag{184}$$

értékeket, kapjuk:

$$f = 1 - \frac{R_v(R+r)}{(R+R_v)r + RR_v} = 1 - \frac{R_v(R+r)}{(r+R)R_v + rR} = 1 - \frac{1}{1 + \dfrac{rR}{(r+R)R_v}}.$$

Mivel $R_v \gg R$ és $R > r$, a legutolsó egyenlet nevezőjében álló tört értéke lényegesen kisebb egynél. Ilyenkor egyszerűbb alakba írhatjuk kifejezésünket a következő, gyakran használatos közelítés segítségével:

$$(1+\lambda)^\alpha \approx 1 + \alpha\lambda, \tag{185}$$

A közelítés $\lambda \ll 1$ esetén bármely α-ra érvényes (legyen az pozitív vagy negatív, egész vagy törtszám). A mi esetünkben $\alpha = -1$ és $\lambda = rR(r+R)^{-1}R_v^{-1}$. Elvégezve a helyettesítést:

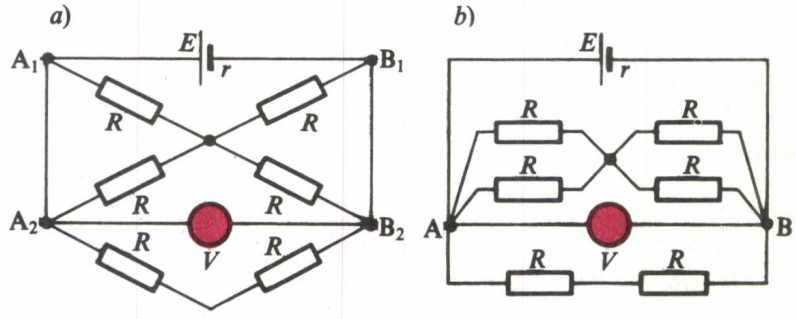
$$f \approx \frac{rR}{(r+R)R_v}. \tag{186}$$

A (186) kifejezésbe behelyettesítve a feladatban szereplő értékeket, a kérdéses hiba: $f \approx 1/220 = 0{,}0045$.

Első diák: Ez azt jelenti, hogy minél nagyobb a voltmérő belső ellenállása az áramkör ellenállásához képest, annál kisebb ez a hatás – azaz annál inkább elhanyagolható a voltmérő bekötése által okozott hiba?

Tanár: Igen, ez így van. De vegyük figyelembe, hogy az $R \ll R_v$ elegendő, de nem szükséges feltétele az f hiba kis értékének. A (186) kifejezésből világos, hogy az f hiba kicsi abban az esetben is, ha fennáll az $r \ll R_v$ feltétel, azaz a voltmérő ellenállása sokszorosa az áramforrás belső ellenállásának. Ekkor viszont a külső ellenállás bármennyire nagy lehet.

Példa: Adott a 134. *a)* **ábrán bemutatott áramkör. Ismert:** $E = 6$ **V,** $r = 2/3\ \Omega$, $R = 2\ \Omega$. **Számítsuk ki a voltmérő által mért értéket!**



134. ábra

Első diák: A voltmérő ellenállását vehetjük végtelennek?

Tanár: Igen, hisz a feladat nem adja meg ezt az értéket. Sőt a vezetékek ellenállását is elhanyagolhatjuk.

Első diák: Akkor viszont az áram feltehetően nem fog a középen levő ellenállásokon átfolyni, hanem közvetlenül az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszokon megkerüli azokat.

Tanár: Téved. Mielőtt még az áramot vizsgálnánk, én azt javaslom, hogy próbáljuk meg egyszerűsíteni az áramkört. Mivel az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszoknak nincs ellenállásuk, ebből következik, hogy $U_{A_1} + U_{A_2}$ és $U_{B_1}U_{B_2}$. Továbbá alkalmazzuk a következő szabályt: **ha egy áramkör valamely két pontja azonos potenciállal rendelkezik,**

akkor ez a két pont összeköthető anélkül, hogy az ellenállásokon átfolyó áramok értéke megváltozna.

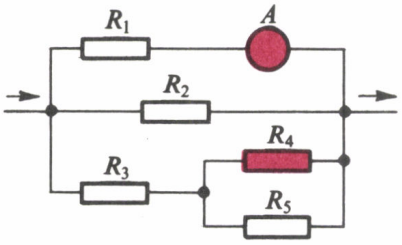
Alkalmazva ezt a szabályt a mi esetünkben, az A_1 ponthoz és A_2 ponthoz csatlakozó ellenállások végeit összekötjük. Hasonlóképpen járunk el B_1 és B_2-vel. Ezek után a 134. *b)* ábrán bemutatott áramkört kapjuk. Ennek számítása viszont már egészen egyszerű feladat. Ezért csupán a végeredményt adnám meg: a voltmérő 4 V értéket mutat. Javaslom, hogy a megoldást önállóan végezzék el.

Feladatok:

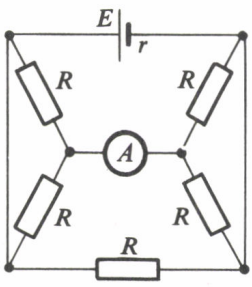
98. A 135. ábrán bemutatott áramkörbe kötött amperméró 0,5 A értéket mutat. Számítsuk ki az R_4 ellenálláson átfolyó áramot, ha ismert $R_1 = R_4 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = R_5 = 1\ \Omega$!

99. A 136. ábrán bemutatott áramkör ismert elemei: $E = 4$ V, $r = 1\ \Omega$, $R = 2\ \Omega$. Számítsuk ki az amperóra által mutatott értéket!

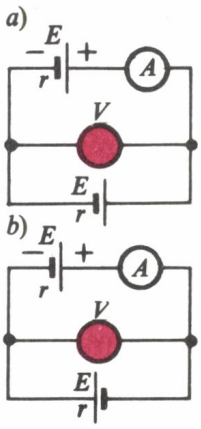
100. Milyen értéket mér a voltmérő és az amperméró a 137. ábrán jelölt esetekben? E és r értékét ismertnek vegyük, a vezetékek ellenállását elhanyagolhatjuk. Rajzoljuk fel mindkét esetben a potenciálváltozás grafikonját az áramkör mentén!



135. ábra



136. ábra



137. ábra

101. Egy galvanométer ellenállása $R_g = 0{,}2\ \Omega$. Vele párhuzamosan egy $R_s = 0{,}05\ \Omega$ értékű söntellenállást kapcsolunk. Mekkora R_x ellenállást kell sorbakötnünk e rendszerrel, hogy összességében az R_g-vel azonos ellenállást kapjunk?

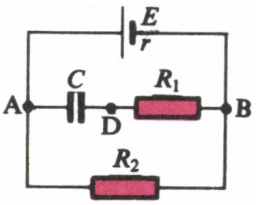
102. Az $E = 10$ V és $r = 1\ \Omega$ értékű elemek kapocspontjára egy $R_v = 100\ \Omega$ ellenállású voltmérőt kapcsolunk. Számítsuk ki a voltmérő által mutatott értéket és az f relatív hiba értékét, amelyet a végtelen ellenállású voltmérőhöz képest kapunk!

103. Az $R = 49\ \Omega$ ellenállást és $E = 10$ V, $r = 1\ \Omega$ értékű áramforrást tartalmazó áramkörbe egy $R_I = 1\ \Omega$ ellenállású árammérőt kapcsolunk. Számítsuk ki az árammérő által mért I áram értékét, valamint az f relatív mérési hibát, amelyet ahhoz képest kapunk, ha az árammérő nem rendelkezne ellenállással!

33. BEKAPCSOLHATÓ-E A KONDENZÁTOR AZ EGYENÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖKBE?

Tanár: Oldjuk meg a következő példát!

Adott a 138. ábrán bemutatott áramkör, ahol C a kondenzátor kapacitása. Számítsuk ki a kondenzátor fegyverzetén levő Q töltést, ha ismert az áramforrás E elektromos ereje és r belső ellenállása!



138. ábra

Első diák: De vajon beköthetjük a kondenzátort az egyenáramú áramkörbe! Hiszen rajta keresztül úgy sem folyik áram.

Tanár: És ha nem folyik is? A párhuzamos ágakon akkor is folyik, nemde?

Első diák: Igen, valóban. Mivel a 138. ábrán a kondenzátoron keresztül nem folyik áram, ezért az R_1 ellenálláson keresztül sem folyik. Az áramkör külső részében csak az R_2 ellenálláson át folyik áram. Az áramerősséget az $I = E/(R_2 + r)$ kifejezés adja meg, tehát az A és B pontok közötti potenciálcsökkenés az R_2 ellenálláson létrejött feszültségeséssel lesz egyenlő, azaz

$$U_B - U_A = IR_2 = \frac{ER_2}{R_2 + r}. \qquad (187)$$

A továbbiakban már tudom, mi a teendő. A kondenzátor fegyverzetén levő töltés kiszámításához ismernem kell az A és D pontok potenciálkülönbségét.

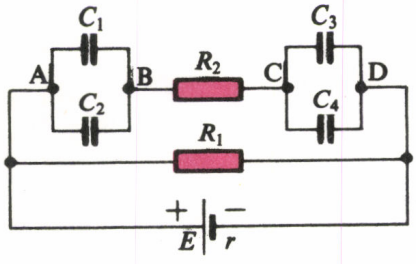
Tanár: Helyesen állapította meg, hogy az R_1 ellenálláson keresztül

nem folyik áram. Akkor viszont ennek az ellenállásnak minden egyes pontja azonos potenciállal rendelkezik (tessék csak visszaemlékezni a 29. órán folytatott vitára!). Tehát $U_D = U_B$. Innen pedig a (187) kifejezés felhasználásával már közvetlenül a keresett eredményt kapjuk:

$$Q = \frac{CER_2}{R_2 + r}.$$

Lássunk még egy példát!

A 139. ábrán bemutatott áramkör ismert elemei: $E = 4$ V, $r = 1\ \Omega$ $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $C_1 = 2\ \mu$F, $C_2 = 8\ \mu$F, $C_3 = 4\ \mu$F, $C_4 = 6\ \mu$F. Számítsuk ki az egyes kondenzátorok fegyverzetén levő töltéseket!



139. ábra

A megoldás során használjuk fel a kondenzátorok soros és párhuzamos kapcsolásával összefüggő szabályt!

Első diák: Igen, emlékszem erre.

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots, \tag{188}$$

soros kapcsolás esetén pedig a kapacitások reciprokait kell összegezni:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots \tag{189}$$

Tanár: A (188) kifejezés alapján kiszámíthatjuk az A és B, valamint a C és D pontok közé kapcsolt eredő kapacitásokat:

$$C_{AB} = 2\ \mu\text{F} + 8\ \mu\text{F} = 10\ \mu\text{F},$$
$$C_{CD} = 4\ \mu\text{F} + 6\ \mu\text{F} = 10\ \mu\text{F}.$$

Az A és D pontok közötti potenciálesést az R_1-en létrejött feszültségesés szolgáltatja:

$$U_D - U_A = IR_1 = \frac{ER_1}{R_1 + r} = 3 \text{ V}.$$

Világos, hogy az R_2 itt semmiféle szerepet nem játszik, így teljesen figyelmen kívül hagyható.
Mivel $C_{AB} = C_{CD}$, így:

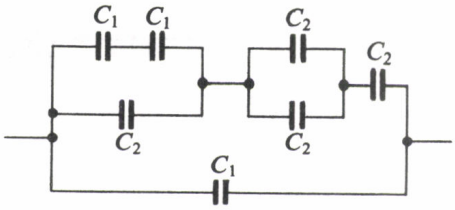
$$U_A - U_A = U_D - U_C = \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ V} = 1{,}5 \text{ V}.$$

A kérdéses töltésértékek tehát:

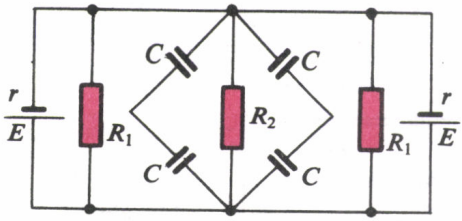
$Q_1 = C_1(U_B - U_A) = 3\ \mu C,$
$Q_2 = C_2(U_B - U_A) = 12\ \mu C,$
$Q_3 = C_3(U_D - U_C) = 6\ \mu C,$
$Q_4 = C_4(U_D - U_C) = 9\ \mu C.$

Feladatok:

104. Számítsuk ki a 140. ábrán bemutatott kondenzátorok eredő kapacitását, ha $C_1 = 2\ \mu$F és $C_2 = 4\ \mu$F!
105. A 141. ábrán bemutatott áramkör ismert elemei: $E = 5$ V, $r = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_1 = 3\ \Omega$, $C = 3\ \mu$F. Számítsuk ki az egyes kondenzátorok fegyverzetén levő Q töltést!

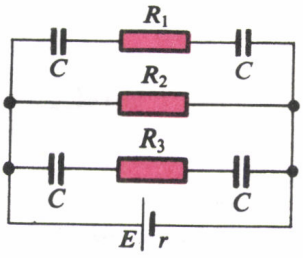


140. ábra



142. ábra

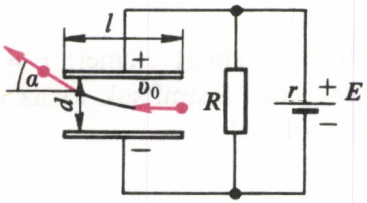
141. ábra



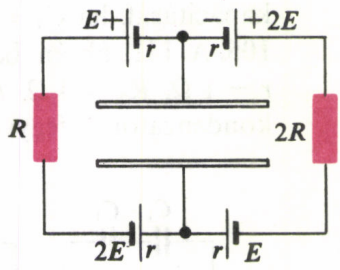
106. Adott a 142. ábrán bemutatott áramkör. Számítsuk ki az egyes kondenzátorok fegyverzetén levő Q töltések értékeit, ha az ábrán jelölt összes érték ismert!

107. Egy l laphosszúságú párhuzamos síkkondenzátort a 143. ábrán jelölt módon kötünk be az áramkörbe. Ismert az áramforrás E elektromos ereje, r belső ellenállása és a kondenzátor fegyverzete közötti d távolság. A fegyverzetekkel párhuzamosan egy elektron v_0 kezdősebességgel jut a kondenzátorba. Mekkora R értékű ellenállást kell a kondenzátorral párhuzamosan kapcsolni, hogy az elektron a fegyverzetekkel α szöget bezáró irányban lépjen ki a kondenzátorból? Az elektron m tömegét és e töltését ismertnek vesszük.

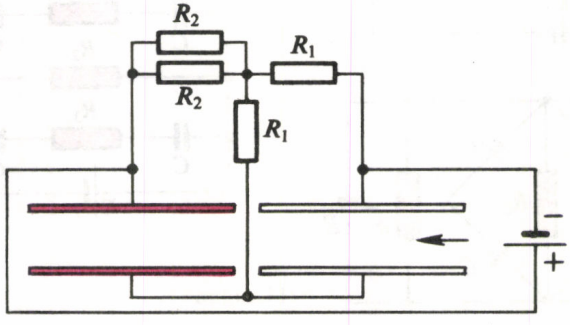
108. Két azonos párhuzamos síkkondenzátort a 144. jelölt módon kapcsolunk az áramkörbe. $R_1 = 4\ \Omega$. Az egyik kondenzátorba a fegyverzetekkel párhuzamos irányban egy elektron lép be (az ábrán ezt nyíllal jelöltük). Mekkora R_2 érték esetén fog az elektron a második kondenzátorból a fegyverzetekkel párhuzamos irányban távozni?



143. ábra



145. ábra

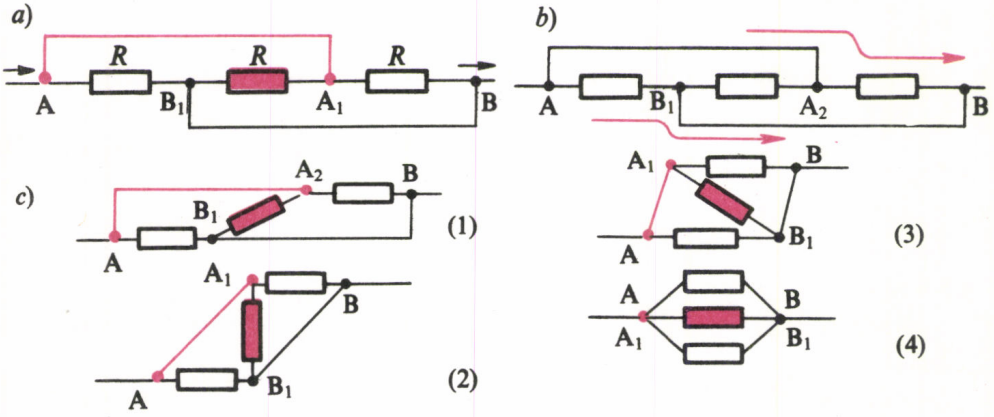


144. ábra

109. Egy párhuzamos síkkondenzátort, amelynek a fegyverzetei l hosszúságúak és egymástól d távolságra helyezkednek el, a 145. ábrán jelölt módon kapcsolunk az áramkörbe. Az E elektromos erő, valamint az R és r ellenállások értékei ismertek. A kondenzátorba a lapkákkal párhuzamos irányban egy v_0 sebességű elektron lép be. A lapkákkal mekkora α szöget bezáró irányban fog az elektron a kondenzátorból kilépni? Az elektron m tömegét és e töltését ismertnek vehetjük.

34. KI TUDJÁK-E SZÁMÍTANI AZ ELÁGAZÓ ÁRAMKÖRÖK ELLENÁLLÁSÁT?

Tanár: Számítsuk ki a 146. *a)* **ábrán bemutatott áramköri szakasz eredő ellenállását! A vezetékek ellenállását elhanyagolhatjuk.**



146. ábra

Első diák: Ha a vezetékek ellenállása elhanyagolható, akkor ezeket a vezetékekeket teljesen figyelmen kívül hagyhatjuk. Ily módon pedig a keresett ellenállás értéke 3 *R*.

Tanár: Nem szabad ennyire elkapkodni a választ. A vezeték ellenállásának elhanyagolása és a vezeték figyelmen kívül hagyása – két teljesen különböző dolog (bár egyes felvételizők azonosítják ezt a két fogalmat).

Ha egy áramkörből valamely vezetéket elhagyunk, ezzel az adott vezetéket tulajdonképpen egy végtelenül nagy ellenállással helyettesítjük.

A vezeték ellenállásának az elhanyagolása pedig éppen a fordítottját jelenti: a vezeték nulla ellenállást képvisel.

Első diák: Tényleg, ezt én nem gondoltam végig. A feladatot most már a következőképpen oldom meg: az A pontban az áram két ágra oszlik. Ezek irányát a 146. *b)* ábrán nyíllal jelöltem. Ez esetben viszont a középen elhelyezkedő ellenállás teljesen figyelmen kívül hagyható, tehát a kérdéses eredő ellenállás értéke: $R/2$.

Tanár: Ez az eredmény is hibás. Javaslom, hogy a következő szabály szerint járjon el:

Keresse meg az áramkör azonos potenciálú pontjait, és kösse össze azokat egymással. Ezzel az egyes ágakon átfolyó áram értéke nem változik meg, viszont maga az áramkör lényegesen leegyszerűsödhet.

Erre a tényre már a 32. órán is felhívtam a figyelmet. Mivel a vezetékek ellenállása elhanyagolható, ezért most az A és A_1 pontok potenciálja azonos lesz. Ugyanez a helyzet a B és B_1 ponttal is. A fenti szabály értelmében eljárva, oly módon változtatjuk az áramkört, hogy ezek a pontok valahogyan egybeessenek. E célból fokozatosan csökkentjük a vezetékek hosszát. A művelet sorrendjét a 146. *c)* ábra lépésenként [(1) → (2) → (3) → (4)] mutatja be. Végül azt találjuk, hogy az áramkör három ellenállása párhuzamos kapcsolásban van, tehát az eredő ellenállás: $R/3$.

Első diák: Valóban. A 146. *c)* ábrából világosan kitűnik, hogy ez párhuzamos kapcsolás.

Tanár: Lássunk egy másik példát!

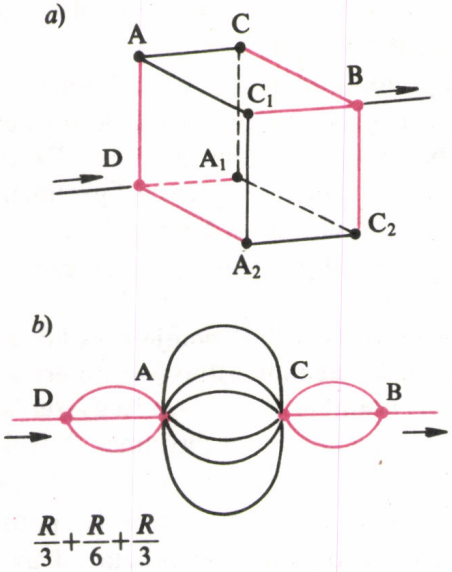
Adott a 147. *a)* ábrán bemutatott kocka, amelynek az éleit R ellenállású vezetékek alkotják. Számítsuk ki a kocka eredő ellenállását, ha a kockát az ábrán jelölt módon kapcsoljuk az áramkörbe!

Használjuk a fent említett szabályt! Jelöljük meg azokat a pontokat, amelyeknek a potenciálja megegyező!

Első diák: Úgy gondolom, hogy három pont, az A_1, A_2 és A_3 potenciálja (lásd 147. *a)* ábra) lesz azonos, mivel a kocka mindhárom (DA, DA_1 és DA_2) éle teljesen ekvivalens.

Tanár: Ez igaz. Ugyanígy ekvivalensek a BC, BC_1 és BC_2 élek is. Tehát a C, C_1 és C_2 pontok potenciálja is megegyező lesz. A továbbiakban hajlítsuk meg a kocka éleit, és egyesítsük az azonos potenciálú pontokat. Hogyan néz ki ekkor az ábránk?

Első diák: A 147. *b)* ábra szerint alakul a kép.



147. ábra

Tanár: Nagyon helyes. Valóban a 147. *b)* ábrát kapjuk, amely ekvivalens az eredeti áramkörrel (a kockával), de lényegesen egyszerűbb annál. Most már nem nehéz kiszámítani az eredő ellenállást.

Első diák: Az eredő ellenállás értéke:

$$\frac{1}{3}R+\frac{1}{6}R+\frac{1}{3}R=\frac{5}{6}R.$$

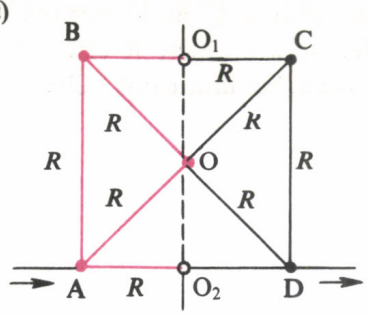
Második diák:

És hogyan számítható ki az átlókkal is ellátott vezetőnégyzet, ha a 148. *a)* ábrán bemutatott módon kapcsoljuk azt az áramkörbe?

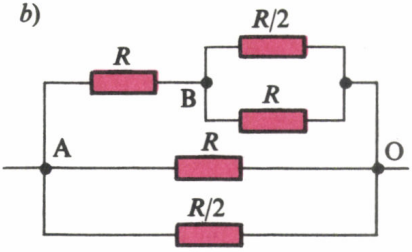
Tanár: Meg kell keresnünk az azonos potenciálú pontokat. Jelen esetben könnyen belátható, hogy az áramkör tengelyesen szimmetrikus. A szimmetriatengelyt a 148. *a)* ábrán szaggatott vonallal tüntettem fel. Világos, hogy a szimmetriatengelyen fekvő összes pontnak azonos potenciállal kell rendelkezni, amelynek a számértéke az A és C pontok potenciáljának számtani közepével lesz azonos. Tehát az O, O_1 és O_2 pontok potenciáljai megegyeznek.

Az ismert szabály alkalmazásával az áramkör két azonos, egymással sorba kapcsolt szakaszra bontható fel. Az egyik ilyen szakaszt a 148. *b)* ábra szemlélteti. Egy ilyen szakasz ellenállását már nem

a)



b)



148. ábra

nehéz kiszámítani. Ha a négyzet minden egyes jelölt elemének az ellenállása R, akkor a szakasz eredő ellenállása $4/15R$. Tehát a keresett eredőérték $8/15R$.

Első diák: Tehát az a legfontosabb szabály, hogy megkeressük az áramkör azonos potenciálú pontjait, és ezeket egyesítve egyszerűsítsük az ábrát?

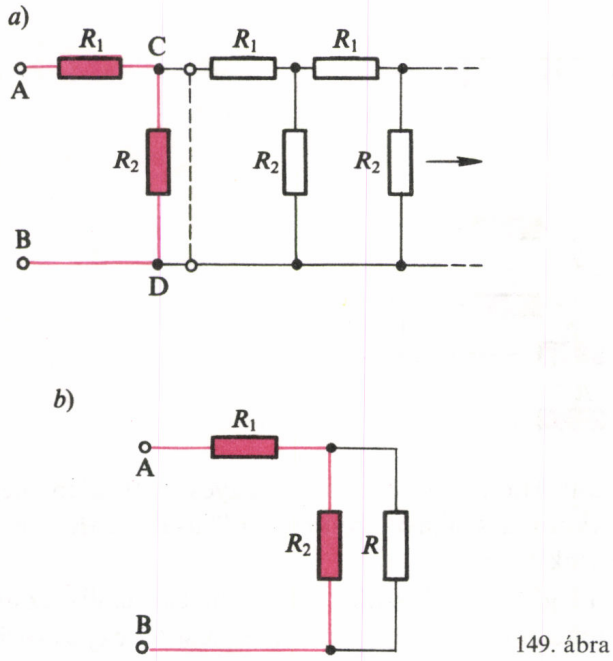
Tanár: Pontosan így van. Végül feladnék egy példát, amely egy végtelen szakaszt tartalmaz.

Adott egy áramkör, amelyben az R_1 és R_2 ellenállásból álló rész végtelenül sokszor ismétlődik (149. *a)* ábra). Számítsuk ki az A és B pontok közötti ellenállás eredőjét!

Első diák: Lehetséges olyan megoldás, amelynél a matematikai indukció elvét alkalmazzuk? Tehát előbb egyetlen, majd kettő, három szakaszt vizsgálunk, és végül megkíséreljük az eredményt n szakaszra általánosítani, ha $n \to \infty$.

Tanár: Nem, itt nincs szükség a matematikai indukció módszerére. Használjuk ki inkább azt, hogy ha a végtelenből elveszünk egyet, ettől a végtelen értéke még nem változik. Vágjuk le a vizsgált áramkörről az első szakaszt (a 149. *a)* ábrán ezt szaggatott vonal jelzi)! Világos, hogy ezzel az áramkör jobbra eső részében még mindig

végtelen számú szakasz marad, tehát a C és D pontok közötti ellenállásnak egyenlőnek kell lennie a keresett R értékkel. Tehát a kezdeti áramkör a 149. *b)* ábrán bemutatottal helyettesíthető. Ennek az áramkörnek az ellenállása viszont



149. ábra

$$R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}$$

értékkel egyenlő. Mivel ez az áramkör ekvivalens a kiindulási áramkörrel, ezért az ellenállása is megegyezik a keresett ellenállással. Tehát:

$$R = R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2},$$

vagyis a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$$R^2 - RR_1 - R_1R_2 = 0.$$

Az egyenlet megoldása:

$$R = \frac{R_1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4\frac{R_2}{R_1}}\right).$$

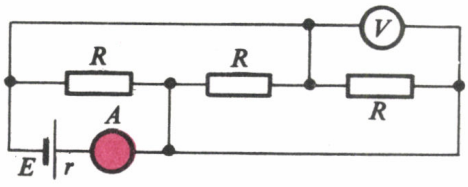
Első diák: Ez valóban nagyon érdekes megoldás.*

Feladatok:

110. A 150. ábrán bemutatott áramkör ismert elemei: $E = 4$ V, $r = 1\ \Omega$, $R = 45\ \Omega$. Számítsuk ki a voltmérő által mért U, illetve az ampermérő által mért I értéket!

111. Számítsuk ki a 148. *a)* ábrán bemutatott négyzet ellenállását, ha azt a A és C pontoknál kötjük az áramkörbe!

112. Egyenként R ellenállású vezetékekből egy szabályos hatszöget képezünk, amelynek az átlói is megvannak. Számítsuk ki a hatszög ellenállását, ha azt a 151. *a)* ábrán jelölt módon kapcsoljuk az áramkörbe!

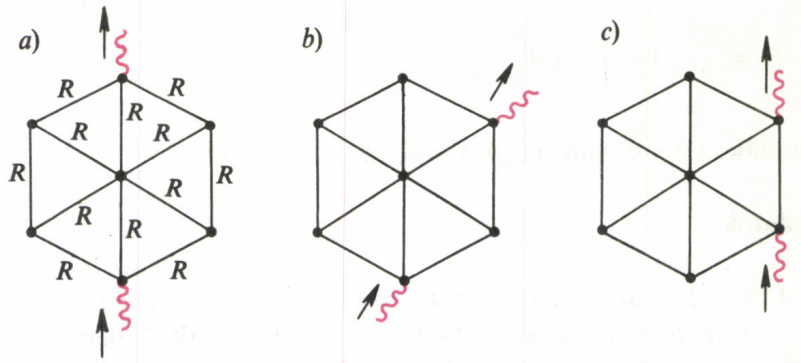


150. ábra

* A másodfokú egyenletnek két gyöke van. A fenti megoldás során fel nem tüntetett gyök:

$$R = \frac{R_1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + 4\frac{R_2}{R_1}}\right).$$

A feladat megoldása csak akkor teljes és elfogadható, ha megvizsgáljuk, hogy a két gyök közül melyiket kell kizárni. A kizárást sokféleképpen tehetjük. Például figyelembe vesszük azt a nem hangsúlyozott, de hallgatólagosan elfogadott természetes feltételt, hogy az R_1, R_2 és R ellenállások értéke csak nemnegatív szám lehet. Márpedig ha $R_2 > 0$, akkor az itt felidézett gyök értéke negatív! Tehát ez a hamis gyök. Sőt, a képlet még $R_2 = 0$ esetén sem ad helyes megoldást, mert akkor $R = 0$ jönne ki, holott amint az a 119. *a)* ábra megfelelő átalakításából látszik, ilyenkor az áramkör ellenállása R_1. (Az átalakításnál az R_2 ellenállást egy vezetékdarabbal kell áthidalni. Így a B és C pontok potenciálja ugyanaz lesz, vagyis az első R_1 ellenállás kivételével a többin nem folyik áram.) — *A szerk.*



151. ábra

113. Számítsuk ki a 112. feladatban szereplő szabályos hatszög ellenállását, ha azt a 151. *b)* ábrán bemutatott módon kapcsoljuk az áramkörbe!

114. Számítsuk ki a 112. feladatban szereplő szabályos hatszög ellenállását, ha azt a 151. *c)* ábrán bemutatott módon kapcsoljuk az áramkörbe!

35. MIÉRT ÉG KI A VILLANYÉGŐ?

Első diák: A túl nagy feszültség vagy a túl nagy áram okozza a villanyégő kiégését?

Tanár: Hogyan felelne erre a kérdésre?

Első diák: Úgy gondolom, hogy az ok az áram nagy értéke.

Tanár: A válasza egyoldalú. Sőt már a fenti alakban felvetett kérdés is egyoldalú, és ilyen értelemben provokálja a helytelen választ. Az izzószál végső soron azért ég el, mert izzításakor a megengedettnél több hő szabadul fel. Az időegység alatt felszabaduló hőmennyiség három tényezőtől is függhet: az égőre adott feszültségtől, az égőn átfolyó áramtól és az égő ellenállásától. Idézzük fel tehát azokat a kifejezéseket, amelyekkel meghatározható az R ellenálláson leadott teljesítmény.

Második diák: Én a következő kifejezésekre emlékszem:

$$N = (U_1 - U_2)I; \tag{190}$$

$$N = I^2R; \tag{191}$$

$$N = \frac{(U_1 - U_2)^2}{R}, \tag{192}$$

ahol: N – az R ellenálláson leadott teljesítmény;

$U_1 - U_2$ – az ellenállás két végpontján mért potenciálkülönbség;

I – az ellenálláson átfolyó áram.

Első diák: Mi általában a (191) kifejezést használtuk.

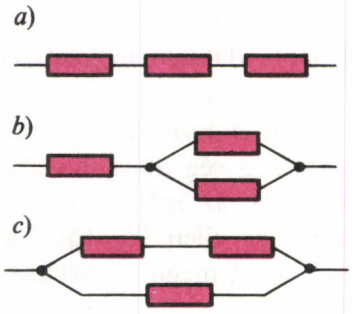
Tanár: Könnyen belátható, hogy mind a három kifejezés ekvivalens, mivel az Ohm-törvény különböző alakjai segítségével mind azonos alakra hozható. Pontosan az a tény, hogy mindhárom kifejezés ekvivalens, mutatja jól, hogy a villanyégő kiégésekor nem szabad külön vizsgálni a feszültséget vagy az áramot, hanem mindhárom értéket: az áramot, a feszültséget és az ellenállást együtt kell

szemlélni. Első diákhoz: Miért pont a (191) kifejezést részesíti előnyben?

Első diák: Azért, mert az égőre adott feszültség rendszerint állandó, tehát a teljesítmény feszültségfüggése ilyen értelemben érdektelen. A (191) kifejezés a gyakorlatban leginkább alkalmazható.

Tanár: Helytelenül jár el, amikor a (191) kifejezést kiemelt helyzetbe állítja. Nézzünk csak erre egy példát!

Egy elektromos főzőlap három azonos R ellenállású fűtőszálat tartalmaz. Ha a három fűtőszál párhuzamosan van kapcsolva, akkor a teáskannában a vizet $t_0 = 6$ perc alatt forralja fel. Mennyi idő alatt forr fel a teáskannában levő ugyanekkor mennyiségű víz, ha a fűtőszálakat a 152. ábrán jelölt módokon kapcsoljuk?



152. ábra

Első diák: Mindenekelőtt kiszámítom az egyes kapcsolásokhoz tartalmazó eredő ellenállásokat. Az eredeti állapotban, amikor párhuzamos kapcsolásuk van, az eredő ellenállása: $R_0 = R/3$.

A 152. *a)*, *b)*, *c)* ábrák esetén pedig:

$$R_a = 3R,$$

$$R_b = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R, \tag{193}$$

$$R_c = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}R.$$

Ha a főzőlapra adott feszültséget U-val jelöljük, akkor az Ohm-törvény alapján minden egyes esetre kiszámítjuk a főzőlapon átfolyó áramot...

Tanár: (közbevág): Nem szükséges az áramot kiszámítani. Jelöljük az egyes esetekben a víz forralásához szükséges időt rendre t_0, t_a, t_b és

t_c-vel. A felszabaduló hőmennyiséget az elektromos teljesítmény és a melegítési idő szorzata adja meg. Ez mind a négy esetben azonos érték. A (192) kifejezés alapján felírható:

$$\frac{U^2}{R_0}t_0 = \frac{U^2}{R_a}t_a = \frac{U^2}{R_b}t_b = \frac{U^2}{R_c}t_c. \tag{194}$$

Behelyettesítve a (194)-be a (193) értékeit és a közös tényezőkkel (U^2 és $1/R$) való egyszerűsítés után a következőt kapjuk:

$$3t_0 = \frac{t_a}{3} = \frac{2t_b}{3} = \frac{3t_c}{2}.$$

Ebből pedig a keresett értékek: $t_a = 9t_0 = 54$ perc; $t_b = 9\ t_0/2 = 27$ perc; $t_c = 2\ t_0 = 12$ perc.

Megjegyzem, hogy ennél a feladatnál pontosan azért volt célszerű a (192) kifejezést alkalmazni, mert a főzőlapra adott feszültség értéke állandó.

Vizsgáljuk meg a következő feladatot!

Adott egy E elektromos erővel és r belső ellenállással rendelkező áramforrás, amelyet egy R külső ellenállással terhelünk. Mennyi az áramforrás hatásfoka?

Második diák: **Az áramforrás hatásfokát a hasznos teljesítmény (azaz a külső ellenálláson leadott teljesítmény) és az összteljesítmény, (tehát a külső és belső ellenálláson együttesen felszabaduló teljesítmény) hányadosa szolgáltatja:**

$$\eta = \frac{I^2R}{I^2(R+r)} = \frac{R}{R+r}. \tag{195}$$

Tanár: Helyes.

Tegyük fel, hogy az áramforrás belső ellenállása nem változik, csak a külső ellenállás. Hogyan változik ekkor az áramforrás hatásfoka?

Második diák: Ha $R = 0$ (rövidzárlat esetén) $\eta = 0$. Ha $R = r$, akkor $\eta = 0{,}5$. Ha R értéke minden határon túlnő, akkor a hatásfok közelít egyhez.

Tanár: Pontosan így van.

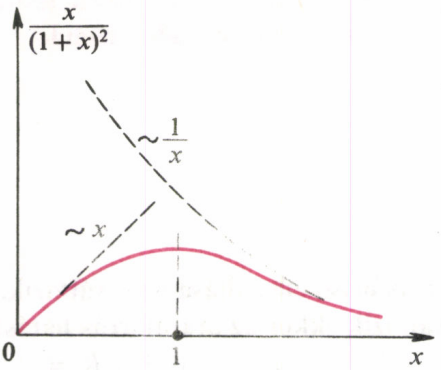
És hogyan változik közben a hasznos teljesítmény (azaz a külső ellenálláson felszabaduló teljesítmény)?

Második diák: Mivel az R növelésével együtt nő az áramforrás hatásfoka, következésképpen a hasznos teljesítmény is megnő. Tehát minél nagyobb az R értéke, annál nagyobb a hasznos teljesítmény is.

Tanár: Ez viszont már nem igaz. Az áramforrás hatásfokának növekedte azt jelenti, hogy megnő a hasznos teljesítményének az összteljesítményhez viszonyított aránya, de közben a hasznos teljesítmény számértéke csökkenhet. Győződjünk meg erről! A hasznos teljesítmény felírható a következőképpen:

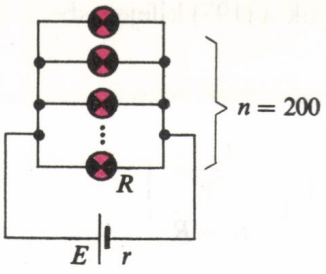
$$N_h = \frac{E^2}{(R+r)^2} R = \frac{E^2}{r} \frac{x}{(x+1)^2}, \tag{196}$$

ahol: $x = R/r$. Ha $x \ll 1$, akkor $N_h \sim x$. Ha viszont $x \gg 1$, akkor $N_h \sim 1/x$. A hasznos teljesítmény maximuma az $x = 1$ ($R = r$) értékekhez tartozik, ekkor $N_h = \frac{E^2}{4r}$. A 153. ábrán bemutatjuk az $y = \frac{x}{(x+1)^2}$ függvény képét, amely jól szemlélteti a hasznos teljesítmény változását a külső ellenállás függvényében. Lássunk egy másik példát!



153. ábra

Egy $E = 100$ V elektromos erejű és $r = 0{,}5\ \Omega$ ellenállású telepre 200 db, azonos $R = 300\ \Omega$ ellenállású égőt kapcsolunk párhuzamosan (154. ábra). Számítsuk ki az egyes égőkön felszabaduló teljesítményt, illetve a teljesítmény értékének relatív változását abban az



154. ábra

esetben, ha a 200 égő égő egyike kiég. A vezetékek ellenállását elhanyagolhatjuk.

Második diák: A külső körben folyó áram értéke:

$$I_{\text{össz}} = \frac{E}{r + \frac{R}{n}} = 50 \text{ A}.$$

Az egy égőn átfolyó áram értéke pedig:

$$I = \frac{I_{\text{össz}}}{n} = 0{,}25 \text{ A}.$$

Ebből kiszámíthatjuk az egy égőn felszabaduló teljesítményt: $N = I^2 R = 18{,}75$ W. Az egy égőn felszabaduló teljesítmény relatív változását abban az esetben, ha a 200 égő közül valamelyik kiég, úgy kapom meg, hogy előbb kiszámítom az egy égőn felszabaduló N_1 teljesítményt $n = 199$ esetén, majd meghatározom az

$$f = \frac{N_1 - N}{N} \text{ arányt.} \tag{197}$$

Tanár: Nem helyeslem f értékének ily módon való kiszámítását. Fejezzük ki ezt az arányt általános alakban az R, r ellenállások és az égők n száma segítségével. Írjuk fel előbb a teljesítményeket:

$$N = \frac{R}{n^2} \cdot \frac{E^2}{\left(r + \frac{R}{n}\right)^2}$$

$$N_1 = \frac{R}{(n-1)^2} \cdot \frac{E^2}{\left(r + \frac{R}{n-1}\right)^2}.$$

Ha ezeket az értékeket behelyettesítjük a (197) kifejezésbe, a következő alakot kapjuk:

$$f = \left(\frac{N_1}{N} - 1\right) = \left(\frac{nr+R}{nr-r+R}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{1-\frac{r}{nr+R}}\right)^2 - 1.$$

A legutolsó kifejezés nevezőjében álló tört értéke egynél sokkal kisebb szám (mivel az áramkörben nagyszámú égő található és az egyes égők ellenállása sokkal nagyobb az áramforrás belső ellenállásánál). Ezért a kifejezést a következő közelítő alakkal helyettesíthetjük:

$$f = \left(1-\frac{r}{nr+R}\right)^2 - 1 \approx \frac{2r}{nr+R}. \qquad (198)$$

A (198) kifejezésbe behelyettesítve a feladat számértékeit, eredményül $f \approx 0{,}0025$ értéket kapunk.

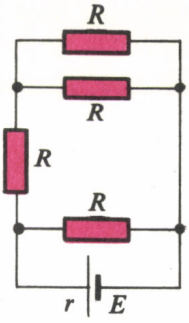
Második diák: És miért tetszik azt kifogásolni, hogy előbb kiszámítom N_1 értékét, majd behelyettesítve azt a (197)-be, kiszámítom f-et?

Tanár: Látja, hogy $f = 0{,}002\,5$? Tehát, hogy ezt az eredményt megkapjuk, a maga által javasolt (számszerű) megoldásnál N_1 értékét négy tizedes pontossággal kell kiszámítani. Viszont előre még csak nem is fogja tudni, mekkora pontossággal kell N_1-et ismernie. Ha tegyük fel, két tizedes pontossággal számolná ki N_1 értékét, akkor arra a következtetésre jutna, hogy az N_1 teljesítmény értéke egybeesik N-nél.

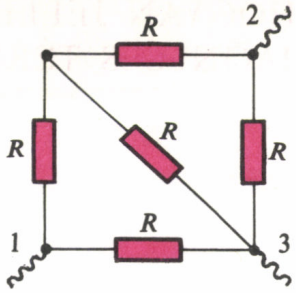
Feladatok:

115. A 155. ábrán jelölt áramkör ismert elemei: $E = 100$ V, $r = 36\ \Omega$, az áramforrás hatásfoka pedig 50%. Számítsuk ki az R ellenállás és az N hasznos teljesítményértékét!

116. Egy áramforrásra annak belső ellenállásánál k-szor nagyobb ellenállást kötünk. Hogyan változik meg a hatásfok, ha a külső ellenállással párhuzamosan még egy ellenállást kötünk, amelynek az értéke az áramforrás belső ellenállásának n-szerese? Legyen $k = 4$, $n = 2$.



155. ábra



156. ábra

117. Öt darab azonos R ellenállást a 156. ábrán jelölt módon kapcsolunk. Egyik esetben az 1 és 2 pontokra kapcsoljuk a feszültséget, másik esetben pedig az 1 és 3 pontokra. Számítsuk ki az áramforrás r belső ellenállását, ha az áramforrás hatásfoka az első és második esetben 16/15 arányt mutat! Számítsuk ki a hatásfokok számértékét is!

118. Az elektromos főzőlap fűtőszálait a 156. ábrán jelölt módon kapcsoljuk, és az 1. és 2. pontokra adjuk a feszültséget. Ekkor egy adott idő alatt 500 g vizet tudunk vele felforralni. Mennyi vizet tudunk felforralni ugyanennyi idő alatt, ha a fűtőszálakra a feszültséget az 1. és 3. pontban adjuk? A víz kezdeti hőmérséklete mindkét esetben azonos, és a hőveszteségtől eltekintünk.

119. 1,5 liter, 20 °C-os vizet $t_1 = 15$ percig egy kétfűtőszálas főzőlapra helyezünk. Ha a fűtőszálak párhuzamosan vannak kötve, akkor ennyi idő alatt a víz felforr, és 100 g vízből gőz keletkezik. Mi történik a vízzel, ha fűtőszálakat sorosan kötjük, és a melegítést $t_2 = 60$ percig folytatjuk? A forráshő $22{,}6 \cdot 10^5$ J/kg. Mekkora t_3 időre van szükség a víz felforralásához, ha egyetlen fűtőszállal melegítjük azt?

36. HOGYAN JELLEMEZHETŐ A MÁGNESES TÉR?

Tanár: Hol találkozunk időben állandó mágneses térrel?

Első diák: Ilyen tér az állandó mágnes, vagy az olyan elektromos vezető környezetében keletkezik, amelyen állandó értékű áram folyik.

Tanár: **Az elektrosztatikus tér egy adott pontjában a térerősséget oly módon tudjuk meghatározni, ha ebbe a pontba egy próbatöltést helyezünk és megmérjük a reá ható erőt.**

Hogyan járhatunk el a mágneses tér esetében? Milyen módszerrel és hogyan lehet meghatározni a mágneses tér jellemző paramétereit?

Első diák: Ha papírlapra vasreszeléket szórunk, és azt mágneses térbe helyezzük, a vasszemcsék átmágneseződnek és a tér erővonalai mentén helyezkednek el.

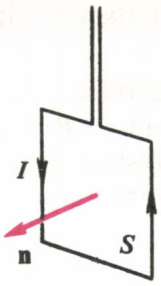
Második diák: Erre a célra felhasználható még egy iránytű vagy egy elektromos vezetékből álló hurok, amelyen áram folyik keresztül.

Tanár: Szóljunk egy kissé részletesebben a hurokról!

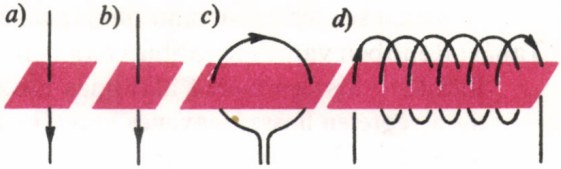
Második diák: Ezekben a kérdésekben én sohasem tudtam otthonosan mozogni. Ezért jobb szeretném, ha a Tanár Úr magyarázná el.

Tanár: **A mágneses terek vizsgálatára felhasználható mind a vasreszelék, mind pedig az iránytű. Legcélszerűbb azonban erre a célra az áramvezető hurkot igénybe venni. Ha egy hurkot a mágneses tér valamely pontjában elhelyezünk, akkor segítségével meghatározható az úgynevezett mágneses indukcióvektor (jele: B), amely az elektrosztatikus tér térerősségvektorával rokon mennyiség. Mágneses erővonalaknak azokat a görbéket nevezzük, amelyeknek bármely pontjához húzott érintő iránya egybeesik a B mágneses indukcióvektorral.**

Vizsgáljunk meg egy hurkot, amelyen át állandó nagyságú I áram folyik! A hurok területe: S. Nevezzük a hurok síkjára merőleges vektort pozitív **n** normálisnak, ha az a hurokban folyó áram irányával egybeesik (157. ábra)! A mágneses tér forgató hatást gya-



157. ábra



158. ábra

korol a hurokra és végül egy meghatározott helyzetbe állítja azt be. **Az egyensúlyi helyzetben az n pozitív normális iránya a tér adott pontjában egybeesik a B vektorral.** Ha a hurkot elforgatjuk, akkor a mágneses tér azt egy M forgatónyomatékkal igyekszik egyensúlyi helyzetébe visszatérni. Ez az M nyomaték a normálisnak a **B** vektor irányától való eltérési mértékétől függ (jelöljük ezt a szöget α-val!). $\alpha = 90°$ esetén a forgatónyomaték értéke maximális. Jelöljük ezt M_0-val. A tér egy adott pontjában az M_0/IS hányados a **B** vektor abszolút értékét szolgáltatja:

$$B = \frac{M_0}{IS} . \tag{199}$$

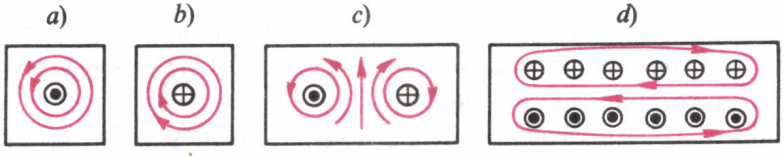
Most pedig rajzoljuk fel a 158. *a)* ábrán jelölt esetekre a mágneses erővonalakat! Az erővonalakat az ábrán feltüntetett síkra adjuk meg!

Második diák: Ezeket az erővonalakat a 159. *a–d)* ábrán tüntettem fel.

Tanár: Itt jegyzem meg, hogy **az erővonalak irányát a csavarszabály adja meg (a csavar tengelyirányú előrehaladása az áram irányával azonos).**

Miben különböznek egymástól a mágneses és az elektrosztatikus terek erővonalai?

Második diák: Az elektromos erővonalak a pozitív töltéstől indulnak



159. ábra

ki, és a negatív töltésbe futnak be. A mágneses térben a töltésnek megfelelő fogalom nem létezik.

A mágneses tér erővonalai önmagukban záródó görbék.

Tanár: Rendben van. A továbbiakban bemutatok néhány, a B mágneses indukció kiszámítására alkalmas hasznos kifejezést:

a) **a végtelen hosszú egyenes vezetéken folyó I áram mágneses tere a vezetéktől R távolságra:**

$$B = k\frac{I}{2\pi R}; \tag{200}$$

b) **az R sugarú kör mentén folyó I áram mágneses tere a kör középpontjában:**

$$B = k\frac{I}{2R}; \tag{201}$$

c) **a szolenoidon átfolyó I áram mágneses tere a szolenoid belsejében** (ha R a menetek sugara; n pedig az l hosszúságúra eső menetek száma):

$$B = k\frac{nI}{l}. \tag{202}$$

(Felhívom a figyelmüket, hogy a szolenoid belsejében a mágneses tér homogén.)

A fenti kifejezésekben a k arányossági tényező értéke az alkalmazott mértékegységtől függ. Az SI-rendszerben:

$$k = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\left[\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}}\right]. \tag{203}$$

A μ_0 állandót vákuum-permeábilitásnak nevezik. Ha a vizsgálatot nem vákuumban, hanem valamilyen más közegben végezzük, akkor μ_0 helyett minden kifejezésben $\mu_0\mu$ értéket kellene vennünk. μ az adott közeg relatív permeábilitása. A mágneses indukció egységeként az SI-rendszerben az olyan tér mágneses indukcióját fogadjuk el, amelyben az 1 $\mathrm{m^2}$ területű, 1 A áram által átjárt menetre 1 Nm maximális forgatónyomaték hat. Ezt az egységet teslának (T) nevezzük: 1 T = 1 N/Am.

Második diák: Én olvastam arról, hogy a mágneses tér paraméterei bármilyen esetben meghatározhatók a Biot–Savart-törvénnyel.

Hogyan történik ez a meghatározás?

Tanár: Előbb nézzük meg akkor a vektorokkal végezhető műveleteket! Melyeket ismerik ezek közül?

Első diák: A vektorok összegezését, illetve a skaláris számmal való osztást és szorzást.

Tanár: Akkor megmutatok még egy műveletet: a vektorok szorzását. **A** és **B** vektori szorzata egy **C** vektor, amely **A** és **B** síkjára merőleges, iránya pedig egybeesik a csavar tengelyirányú előrehaladásával, ha azt az **A** vektort rövidebb úton a **B** vektorba forgatjuk (160. ábra). A vektorszorzat abszolút értéke:

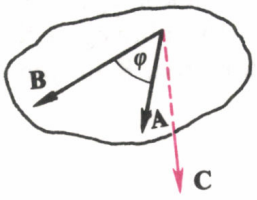
$$C = AB \sin \varphi. \tag{204}$$

A vektorszorzatot így jelöljük:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \tag{205}$$

Ha az **A** és **B** vektorok egymásra merőlegesek, akkor $C = AB$. Ha **A** és **B** párhuzamosak vagy ellentettek, akkor vektorszorzatuk értéke nulla. Megjegyzem, hogy:

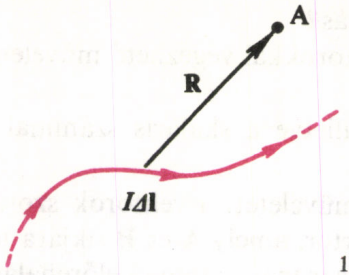
$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \tag{206}$$



160. ábra

Második diák: Számomra ez teljesen új. Meglepő, hogy a vektorszorzat értéke akkor is lehet nulla, ha külön-külön mindkét vektor értéke nullától eltérő. Ezenkívül a tagok felcserélésével megváltozik a szorzat értéke (pontosabban annak előjele).

Tanár: Nagyon helyes az észrevétele. Most pedig térjünk rá a Biot–Savart-törvényre. Vegyünk egy vezetéket, amelyen I áram folyik keresztül. Válasszunk ki a vezetéken egy $\Delta\mathbf{l}$ szakaszt (ezen vektor nagysága a kiválasztott szakasz hosszával egyezik meg, iránya pedig az áram irányával esik egybe). Az $I\Delta\mathbf{l}$ szorzatot nevezzük áramelemnek. Válasszunk ki továbbá egy A megfigyelési pontot, és a kiválasztott áramelemtől az A pontig húzzuk meg az **R** vektort (161. ábra)!



161. ábra

A Biot–Savart-törvény kimondja, hogy az $I\Delta\mathbf{l}$ áramelem által az A pontban keltett $\Delta\mathbf{B}$ mágneses indukció értékét a következő kifejezés szolgáltatja:

$$\Delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^3}\left(\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{R}\right). \tag{207}$$

Az A pontban az indukció vektor teljes értékét oly módon kapjuk, hogy a vizsgált elektromos vezetéket az összes lehetséges áramelemeire bontva, az általuk az A pontban keltett $\Delta\mathbf{B}$ vektorokat összegezzük (integráljuk). A (200)–(202) kifejezések ennek a műveletnek a végeredményei.

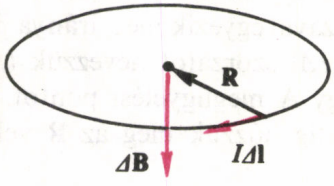
Példaként vegyük a legegyszerűbb esetet, amikor egy kör alakú hurok középpontjában vizsgáljuk a teret. A 162. ábra egy $I\Delta\mathbf{l}$ áramelem esetében szemlélteti a Biot–Savart törvényt. Könnyen belátható, hogy

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot \Delta l. \tag{208}$$

Ha az áram irányában egy új áramelemre térünk át, akkor a $\Delta\mathbf{B}$ iránya és maga a (208) kifejezés nem változik. Tehát:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \sum \Delta l = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot 2\pi R = \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Végeredményként a (201) kifejezést kaptuk meg.



162. ábra

Feladatok:

120. Számítsuk ki két párhuzamos egyenes vezeték közötti távolság felezőpontjában a mágneses indukció értékét, ha a vezetékekben folyó áram I, a közöttük levő távolság pedig d. Két esetet vizsgáljunk meg: *a)* az áramok párhuzamosak; *b)* az áramok ellentétes irányúak.

121. Számítsuk ki a mágneses indukciót két koncentrikus körvezeték középpontjában, ha az áram értéke I, a közök sugarai pedig R és $2R$. Három esetet vizsgáljunk meg: *a)* a vezetékek egy síkban fekszenek és az áramok egy irányban folynak; *b)* a vezetékek egy síkban fekszenek, de az áramok fordított irányban folynak; *c)* a vezetékek egymásra merőleges síkban fekszenek.

37. MIT TUDNAK AZ ÁRAM ERŐHATÁSÁRÓL?

Tanár: Hogyan hat a mágneses tér az elektromos áramra?

Első diák: A mágneses tér az elektromos áramra a balkézszabály szerint hat, ami azt jelenti, hogy ha a mágneses tér a bal tenyerünk felé irányul és kinyújtott négy ujjunk az áram irányába mutat, akkor az erő irányát a kinyújtott hüvelykujjunk adja meg.

Tanár: Ez igaz. Viszont az erő nagyságáról nem esett szó.

A mágneses térnek az áramra gyakorolt hatását Ampère törvénye írja le:

Ha a mágneses tér adott **B** indukciós vektorral rendelkező pontjába $I\Delta\mathbf{l}$ áramelemet helyezünk, a tér az áramelemre

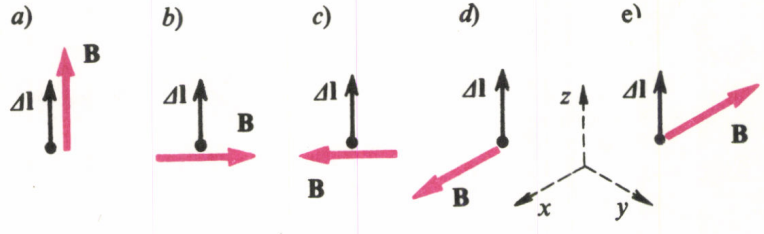
$$\Delta F = I(\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{209}$$

erővel hat.

Itt ismét találkozunk az előző fejezetben megismert vektorszorzattal. Ellenőrizhetik, hogy a (209) kifejezésben szereplő vektorok iránya megegyezik a balkézszabály szerinti irányokkal.

Most pedig határozzuk meg az áramra ható erők irányát a 163. ábrán bemutatott esetekben.

Első diák: Megoldhatjuk a balkézszabály segítségével.



163. ábra

Tanár: Jó úton indul. De én mégis azt javasolnám, hogy próbáljunk hozzászokni a (209) kifejezéshez, gyakoroljuk a vektorszorzatok alkalmazását.

Első diák: Hát megpróbálom. Az *a)* esetben a $\Delta\mathbf{l}$ és **B** vektorok párhuzamosak, tehát vektorszorzatuk nullát eredményez, azaz a mágneses tér semmiféle erőhatást nem gyakorol az áramra. A *b)* esetben ha a csavart a $\Delta\mathbf{l}$ vektortól a **B** vektor irányába forgatjuk, vagyis az óramutató járásával megegyező irányban, a csavar előrehaladása a lap síkjára merőlegesen, tőlünk távolodó irányban megy végbe. Az erő iránya is ez lesz.

Tanár: Helyes. A további műveleteket csak gondolatban végezze, és kérem, hogy az eredményt közölje.

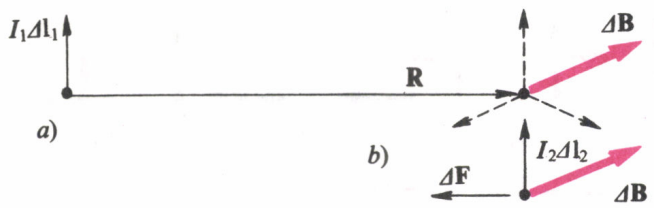
Első diák: A *c)* esetben az erő a lap síkjára merőlegesen felénk irányul. A *d)* esetben az erő a pozitív x tengely irányába mutat, míg az *e)* esetben a *d)* esettel ellentétes irányú.

Tanár: Minden eredménye helyes. Térjünk át az áramvezetők kölcsönhatásának vizsgálatára! Legyen ismert az $I_1\Delta\mathbf{l}_1$ és $I_2\Delta\mathbf{l}_2$ áramelem és az a $\Delta\mathbf{F}$ erő, amellyel az első áramelem hat a másodikra. Induljunk ki a következő megfontolásból: Az $I_1\Delta\mathbf{l}_1$ áramelem a második áramelem helyén $\Delta\mathbf{B}$ mágneses teret hoz létre, amelyet a Biot–Savart-törvény alapján a 164. *a)* ábrán bemutatott rajz segítségével a következő kifejezéssel adhatunk meg:

$$\Delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1}{R^3}\left(\Delta\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}\right). \tag{210}$$

Ez a mágneses tér az Ampère-törvény szerint $\Delta\mathbf{F}$ erővel hat az $I_2\Delta\mathbf{l}_2$ áramelemre (164. *b)* ábra):

$$\Delta\mathbf{F} = I_2(\Delta\mathbf{l}_2 \times \Delta\mathbf{B}). \tag{211}$$



164. ábra

A (210) kifejezést behelyettesítve a (211)-be, megkapjuk azt az erőt, amellyel az $I_1 \Delta \mathbf{l}_1$ áramelem hat az $I_2 \Delta \mathbf{l}_2$ áramelemre:

$$\Delta \mathbf{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R^3} \left[\Delta \mathbf{l}_2 \times \left(\Delta \mathbf{l}_1 \times \mathbf{R} \right) \right]. \qquad (212)$$

Egyébként magáról a 164. ábráról is könnyen leolvashatjuk a jól ismert eredményt: a párhuzamos áramvezetők vonzzák egymást.

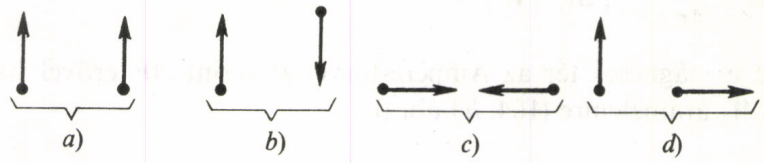
Második diák: Az áramelemek esetében minden egyszerű és érthető. De mit kezdjünk a reális áramokkal és a reális áramvezetőkkel?

Tanár: A vezetékeket minden esetben áramelemeikre kell felbontani (természetesen csak gondolatban), meg kell határozni az egyes áramelempárok közötti kölcsönhatás mértékét, majd az így kapott elemi értékeket összegezni kell.

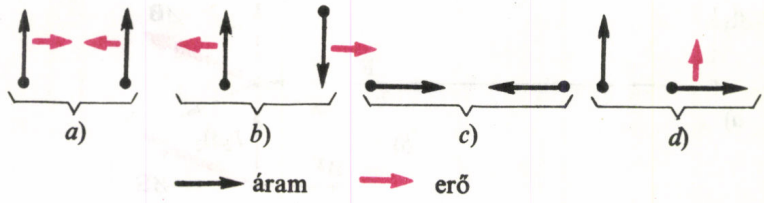
Második diák: Elvileg ez érthető. De hogyan lehet a gyakorlatban egy ilyen sziszifuszi munkát végezni?

Tanár: Az összegzésnél az integrálszámítás van segítségünkre. Ehhez azonban már a felsőfokú matematika ismerete szükséges. Egyelőre maradjunk az áramelemek kölcsönhatásánál.

A 165. ábra négy áramelempárt mutat be. A (212) kifejezés segítségével rajzoljuk fel az egyes áramelemekre ható erőket!



165. ábra



166. ábra

Második diák: Meg tetszik engedni? Azonnal... Az *a)* esetben az áramelemek kölcsönösen vonzzák egymást; a *b)* esetben taszítják; a *c)* esetben nem állnak kölcsönhatásban; a *d)* esetben viszont... Hihetetlen! A *d)* esetben a jobb oldali áramelemre hat erő, a bal oldalira pedig nem. A rajzokat a 166. ábrán tüntettem fel.

Tanár: Ábrázolása helytálló.

Második diák: Hogyan lehetséges, hogy a *d)* esetben Newton harmadik törvénye nem teljesül? Itt a hatás nem azonos az ellenállással!?

Első diák: Elképzelhető, hogy Newton harmadik törvénye csak a mechanikában érvényesül, itt viszont az elektromos áram kölcsönhatásáról van szó.

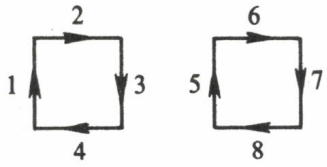
Második diák: Ezzel én nem értek egyet.

Tanár: Bizony. Newton harmadik törvénye fundamentális értékű.

Második diák: Ezért mondom én, hogy a 166. *d)* ábra szerint egy fizikailag lehetetlen helyzetet kapunk.

Első diák: Én meg azt mondom, hogy ez a rajz helyes. Tessék kiutat találni!

Második diák: (rövid gondolkodás után): Azt hiszem, megvan. Mi áramelemeket vizsgáltunk. Ezek nyitott vezetékszakaszok. A reális áramvezetők viszont zártak. Nézzük meg pl. két olyan zárt áramvezető kölcsönhatását, amelyek mindegyike, mondjuk négy áramelemből áll (167. ábra). Az ábrán minden elemet megszámoztam.



167. ábra

Vegyük pl. az 1. áramelemet. Számítsuk ki, hogy milyen erővel hatnak erre az 5, 6, 7 és 8. elemek! Összegezzük ezeket az erőket! Utána vegyük sorra a 2, 3 és 4. áramelemeket. Végeredményben megkapjuk azt az eredő erőt, amely mindkét zárt áramvezetőre hat. Szerintem a két eredő erő nagysága azonos, irányuk pedig – Newton harmadik törvényének megfelelően – ellentétes lesz.

Tanár: Végkövetkeztetése a zárt áramvezetőkre ható eredő erők tekintetében helyes.

Második diák: Tehát végül is nem állunk szemben paradoxonnal.

Tanár: Nem. De mi a helyzet váltakozó áramok esetén? Hiszen ebben az esetben az áramvezetőnek nem feltétlenül kell zártnak lennie, tehát a 166. *d)* ábra teljesen reális esetet tükröz.

Második diák: A paradoxon újjászületett!

Tanár: Nem késztetem további fejtörésre. A váltakozó áramelemek esetében valóban találkozunk olyan szituációval, amikor a hatás nem egyenlő az ellenhatással. Úgy tűnhetne, hogy ebben az esetben az impulzus megmaradásának elve sem érvényesül. Könnyelműség lenne azonban ilyen elhamarkodott következtetésre jutni.

A természetben az impulzus nyomtalanul soha nem tűnik el, és semmiből nem is keletkezik. Arra kell következtetnünk, hogy az általunk vizsgált esetben olyan jelenséggel állunk szemben, amikor a rendszerből valamilyen közvetítő segítségével impulzus távozik. Ez a közvetítő pedig nem más, mint az elektromágneses hullámok.

Végül tehát arra a következtetésre jutunk, hogy a 166. *d)* ábrán bemutatott váltakozó áramú rendszer egy nyitott rezgőkör, amely elektromágneses hullámokat kell hogy kisugározzon.

38. JÓL ÉRTIK FARADAY ÉS LENZ TÖRVÉNYÉT?

Tanár: Mi a mágneses fluxus?

Második diák: **Egy S felületelem mágneses fluxusát (jele: Φ) a felületelem és a B mágneses indukció, valamint a felületre merőleges egyenes és a mágneses indukcióvektor által bezárt α szög cosinusának szorzata (azaz a felületelem és a mágneses indukció skaláris szorzata) adja meg:**

$$\Phi = BS\cos\alpha\,. \tag{213}$$

Első diák: **A felületelem mágneses fluxusa egyenlő a felületet metsző mágneses erővonalak számával.**

Tanár: Mindkét meghatározással egyetértek. Mely feltételek teljesülése esetén érvényes a (213) kifejezés?

Második diák: Nem értem a kérdést.

Tanár: Bizonyára azért nem, mert hasonló kérdéseket nem szokott önmagának feltenni. A (213) kifejezés olyan feltételezés mellett érvényes, hogy az indukcióvektor mind iránya, mind pedig nagysága szerint állandó a felületelem határain belül. Úgy is mondhatjuk, hogy a felületelemen belül a mágneses térnek homogénnek kell lennie.

A mágneses fluxus SI egysége a weber (Wb). Egy weber a mágneses fluxus értéke, ha az 1 m^2-es felületet arra merőlegesen az 1 T mágneses indukciójú tér erővonalai metszik.

A következő a kérdésem: időben megváltozik-e a mágneses fluxus értéke, ha a felületelem homogén mágneses térben, önmagával párhuzamosan mozdul el?

Második diák: És milyen pálya mentén történik az elmozdulás: egyenes vagy görbe mentén?

Tanár: Ön szerint ez lényeges?

Második diák: Valóban, lényegtelen. A fluxus értéke nem változik.

Tanár: Helyes. És mikor változik meg?

Második diák: Ha a felületelem inhomogén mágneses térben mozdul el, illetve, ha az a homogén mágneses térben elfordul.

Tanár: Így van. Most pedig térjünk át az indukció jelenségének vizsgálatára! Mi az indukció?

Második diák: **Ha a hurok síkját metsző Φ mágneses fluxus értéke időben megváltozik, akkor a vezetőben elektromos áram (ún. indukált áram) jön létre. Azt mondhatjuk, hogy ez az áram az E_i indukált elektromos erő hatására keletkezik.**

Tanár: Kitűnő. Most pedig szíveskedjék megmondani, hogy milyen törvény (vagy törvények) írják le az elektromágneses indukciót!

Második diák: **Faraday törvénye kimondja: hogy az E_i értéke a mágneses fluxus $\Delta\Phi/\Delta t$** időbeni változási sebességével arányos. (Ha jól emlékszem, az arányossági tényező SI mértékrendszerben eggyel egyenlő.)

$$E_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \,. \tag{214}$$

Tanár: A Faraday-törvényt helyesen mondta el. Arról sem szabad azonban megfeledkezni, hogy **az elektromágneses indukcióra nem csupán Faraday törvénye, hanem Lenz törvénye is vonatkozik.**

Első diák: **Lenz törvénye kimondja, hogy az indukált áram iránya mindig olyan, hogy azzal az őt létrehozó tér ellen hat.**

Én emlékszem erre a törvényre, de nem teljesen értem a lényegét.

Tanár: **Faraday törvénye az indukált áram (elektromos erő) nagyságát, míg Lenz törvénye annak irányát adja meg.**

Az anyag jobb elsajátítása érdekében oldjuk meg a következő feladatot:

Egy S felületű hurok ω szögsebességgel egyenletes körmozgást végez egy B indukciójú homogén mágneses térben. Időben hogyan változik az indukált áram nagysága? A hurok mely helyzetében lesz az indukált áram nulla, illetve mely helyzetekben maximális értékű?

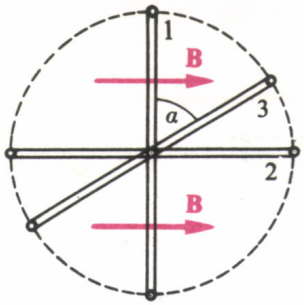
A feladatot a 168. ábra illusztrálja. A hurok keresztmetszetét több helyzetben is feltüntettük. Melyik helyzetben lesz a hurkon áthaladó mágneses fluxus értéke maximális?

Első diák: Az 1. helyzetben.

Tanár: És melyik helyzetben lesz a fluxusváltozás sebessége maximális értékű?

Első diák: (bizonytalanul): Az is az 1. helyzetben ...

Második diák: Szerintem a 2. helyzetben, mivel ebben a helyzetben a



168. ábra

hurok elfordulása során a mágneses tér erővonalait merőlegesen metszi. A 2. helyzetben az indukált áram nagysága maximális.

Tanár: Helyes. És mely helyzetben lesz az indukált áram nulla?

Második diák: Az 1. helyzetben. Itt ugyanis elforduláskor a hurok az erővonalak mentén siklik.

Tanár: Helyes. Figyeljék meg kérem, hogy a hurkon áthaladó fluxus, illetve a fluxus változása – két különböző fogalom. Az 1. helyzetben a fluxus maximális, de a változás sebessége nulla. Ugyanakkor a 2. helyzetben a változás sebessége maximális, míg maga a fluxus nullával egyenlő.

A továbbiakban vizsgáljuk meg az $\alpha = \omega t$ általános esetet, amelyet az ábrán a 3. közbenső helyzet mutat. Ismert:

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t.$$

Keressük a $\Delta\Phi/\Delta t$ hányados elengendően kis Δt értékekhez tartozó értékét. Különbségképzéssel kapjuk a:

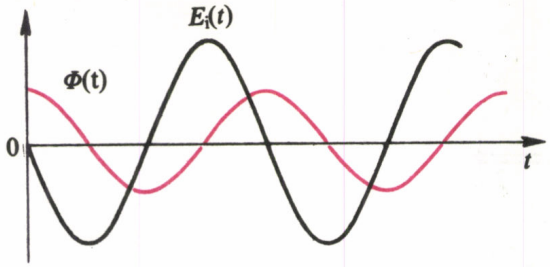
$$\Delta\Phi = BS\left[\cos(\omega t + \omega\Delta t) - \cos \omega t\right] =$$
$$= BS\left[\cos \omega t \cos \omega\Delta t - \sin \omega t \sin \omega\Delta t - \cos \omega t\right]$$

kifejezést. Mivel $\omega\Delta t \ll 1$, ezért elfogadjuk, hogy

$$\cos \omega\Delta t \approx 1 \text{ és } \sin \omega\Delta t \approx \omega\Delta t,$$

ha a szögeket radiánban helyettesítjük be. Innen az indukált elektromos erő keresett értéke:

$$E_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -BS\omega \sin \omega t. \qquad (215)$$



169. ábra

A 169. ábra a mágneses fluxus és a fluxusváltozás sebességét (azaz az indukált elektromos erő változását) szemlélteti az idő függvényében. Az ábráról világosan kiderül, hogy a homogén mágneses térben egyenletesen forgó hurokban az idővel periodikus változó nagyságú erő indukálódik.

39. ISMERETES AZ ÖNINDUKCIÓ ÉS AZ INDUKTIVITÁS FOGALMA?

Tanár: Bizonyára ismerik azt az esetet, amikor a villanykapcsoló átbillentésekor az égő hirtelen kiég. A kérdésem: mit gondolnak, mikor történik ez gyakrabban: be- vagy kikapcsoláskor?

Második diák: Én megfigyeltem, hogy ez kikapcsoláskor szokott történni.

Tanár: Így van. Kikapcsoláskor egy áramlökés jön létre (indukálódik), az ún. megszakítási áram. Ez nem más, mint az önindukció egyik megjelenési formája.

Első diák: Tanár Úr! Legyen szíves elmagyarázni az önindukciót!

Tanár: **Ha egy vezetőn átfolyó áram értéke változik, akkor könnyen belátható, hogy az áram által létrehozott mágneses tér fluxusa is megváltozik. Ennek következtében viszont a vezetőben egy bizonyos nagyságú áram indukálódik. Ezt az áramot nevezzük önindukciós áramnak, magát a jelenséget pedig önindukciónak.**

Tételezzük fel, hogy egy áramkörben állandó áram folyik. Az áramkör megszakításakor az áram értéke pillanatszerűen lecsökken. Ennek következtében a vezetéket körülvevő mágneses tér fluxusa is lecsökken. Faraday törvénye szerint tehát a vezetőben ekkor áramnak kell indukálódnia (jelen esetben önindukcióval). Lenz törvénye értelmében ennek az áramnak olyan irányúnak kell lennie, hogy az a mágneses fluxus csökkenését kiváltó külső tényező ellen hasson. Ebből az következik, hogy **az áramkör megszakításakor indukáló áram iránya megegyezik a főáram irányával, tehát az eredő áram értéke jelentősen megnövekedhet. Az áramkör zárásakor indukálódó áram iránya viszont a főáram irányával ellentétes (tehát csökkenti annak értékét).**

Az önindukció egyes áramkörökben erősebben, másokban gyengébben jelentkezik. Például az egyenes vezetőben fellépő önindukciót lényegesen kisebb mértékű, mint ha ugyanezt a vezetőt spirál

alakúra (szolenoiddá) tekercseljük. Ezért vált szükségessé az adott áramkör önindukciós tulajdonságára jellemző érték, az ún. induktivitás fogalmának bevezetése. A Biot–Savart-törvény szerint a mágneses tér indukciója az áram nagyságával arányos. Másrészt viszont maga a mágneses fluxus is az árammal arányos. Így a fluxus változása és a nyomában indukálódó elektromos erő nagysága is arányos lesz az áram változásával:

$$E = L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \tag{216}$$

Az L arányossági tényezőt az adott áramkör (vagy áramköri elem) induktivitásának nevezzük. A SI mértékrendszerben az induktivitás egysége a henry (H).

Első diák: Az induktivitás fogalma nem új számomra. Ezzel már találkoztunk a zárt rezgőkörök elektromágneses terének vizsgálatakor. Konkrétan a rezgőkör időállandójára gondolok:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{217}$$

Tanár: Igaza van. Hozzátehetjük még, hogy a rezgőkör induktivátásának növelése érdekében a vezetéket tekercs alakban alkalmazzák. Az irodalomban az „induktivitás" alatt gyakran éppen a tekercset értik (pl. „a rezgőkör egy kapacitásból és induktivitásból áll"). Végül próbáljuk kiszámítani egy tekercs induktivitását, ha ismert: az I áram nagysága, a menetek n száma és a tekercs l hossza, S felülete.

Második diák: A (202) és (203) kifejezés alapján a tekercs belsejére a mágneses tér indukciója a következő kifejezéssel írható fel:

$$B = \mu_0\frac{n}{l}I. \tag{218}$$

A mágneses fluxus

$$\Phi = BS,$$

így az indukált elektromos erő:

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \mu_0\frac{Sn}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Tanár: Az ám! De megfeledkezett arról, hogy nem egyszerű hurokkal, hanem n menetszámú tekerccsel van dolgunk, ezért:

$$E = n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{219}$$

Második diák: A (218) és (219) kifejezéseket (216)-ba helyettesítve ezt kapjuk:

$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} = n \cdot \mu_0 \frac{Sn}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

vagyis az induktivitás:

$$L = \mu_0 \frac{n^2 S}{l}. \tag{220}$$

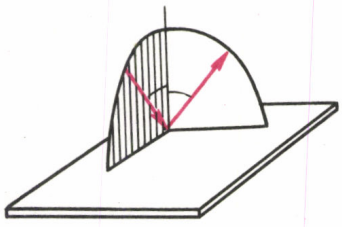
Tanár: Most már jó.

40. ISMERIK-E A FÉNYTÖRÉS ÉS FÉNYVISSZAVERŐDÉS TÖRVÉNYSZERŰSÉGEIT?

Tanár: Hogyan fogalmazható meg a fénytörés és visszaverődés törvénye?

Első diák: A visszaverődés törvénye: a beesési szög megegyezik a visszaverődési szöggel. A fénytörés törvénye pedig, hogy a beesési és törési szögek sinusainak hányadosa az adott fénytörő közeg törésmutatójával egyenlő.

Tanár: Mindkét meghatározás hiányos. Először is nem szólt arról, hogy **a beeső és a visszavert (vagy megtört) sugarak a beesési pontban a visszaverési (vagy törési) síkra merőleges egyenessel egy síkba esnek.** Enélkül ugyanis elképzelhető lenne a 170. ábrán bemutatott visszaverődés is, ami viszont a gyakorlatban nem létezik. Másodszor



170. ábra

pedig: a fénytörés ilyen megfogalmazásban, ahogyan elmondta, csak arra az egyedi esetre érvényes, amikor a fénysugár a vákuumból érkezik valamely közeg határához. Általános esetben viszont azt kell feltételeznünk, hogy az n_1 törésmutatóval rendelkező közegben terjedő fénysugár az n_2 törésmutatójú közeg határához érkezik. Jelöljük a beesési szöget α_1-gyel, a visszaverődési szöget pedig α_2-vel. Ekkor a fénytörést a következő kifejezéssel írhatjuk fel:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (221)$$

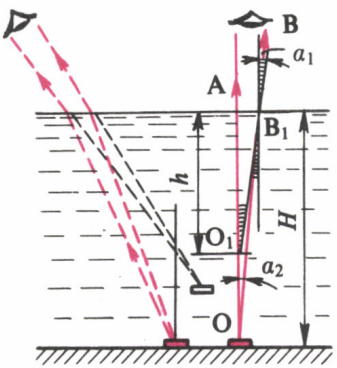
Nézzünk egy példát!

Egy vízzel telt edény fenekén H mélységben egy fémdarab fekszik. Mekkora mélységben látjuk a fémet, ha függőleges irányból nézzük azt?

Első diák: Én tudom, hogy magunkhoz közelebb, mintegy felemelkedve látjuk azt, de a konkrét távolságot nem tudnám kiszámítani.

Tanár: Húzzuk meg a fémet ábrázoló O pontból az OA és az OB_1B egyeneseket (171. ábra). Az OA egyenes nem szenved törést, mivel függőleges (merőleges a víz felszínére), az OB_1B viszont igen. Tételezzük fel, hogy ez a két egyenes, mint széttartó fénysugár eljut a szemünkig. Ekkor a fémdarabot az OA és BB_1 egyenesek O_1 metszéspontjában fogjuk észlelni. Az ábráról leolvasható, hogy ennek a pontnak a h mélysége és a H között a következő összefüggés van: $h \operatorname{tg} \alpha_1 = H \operatorname{tg} \alpha_2$.

Ebből: $$h = H \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}. \qquad (222)$$



171. ábra

Mivel α_1 és α_2 szögek értéke elegendően kicsiny, ezért alkalmazhatjuk az alábbi közelítést:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha \qquad (223)$$

(ha a szögeket radiánban adjuk meg). (223) felhasználásával a (222) kifejezést a következő alakra hozzuk:

$$h \approx H \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{H}{n}. \qquad (224)$$

Mivel a vízre $n = 4/3$, így $h = 3H/4$.

Második diák: Mi történik akkor, ha a fémdarabot a függőlegestől eltérő, valamilyen más irányból nézzük?

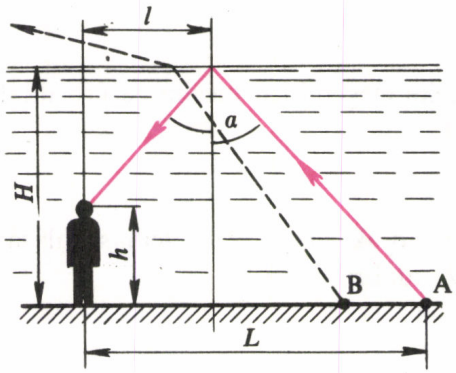
Tanár: Ebben az esetben azt nemcsak megemelkedve, hanem valódi helyzeténél kissé oldalra, távolabb is látjuk (lásd a 171. ábrán a szaggatott vonalat!). Világos, hogy ebben az esetben a számítás már lényegesen nehezebbé válik.

Lássuk a következő példát:

Egy h magasságú búvár egy H mélységű tó fenekén áll. Számítsuk ki a fenéken azon pontoknak a tartózkodási helytől mért távolságát, amelyet a búvár még láthat, a víz felszínéről való teljes visszaverődés következtében.

Első diák: Hasonló feladatokat mi már oldottunk meg. Jelöljük a keresett távolságot L-lel! A 172. ábrán az a legközelebbi A pont, amelyet a búvár a víz felszínéről való teljes visszaverődés következtében még láthat, ezen az L távolságon helyezkedik el. A fénysugár útját piros vonallal jelöltük. Ha egy közelebbi B pontot veszünk, az ebből kiinduló sugár a víz felületén már csak megtörik, de kijut abból (lásd a 172. ábrán szaggatott vonalat!). Az α szög a teljes visszaverődés szöge. Értékét a következő kifejezéssel kapjuk:

$$\sin \alpha = \frac{1}{n}. \tag{225}$$



172. ábra

Az ábra alapján felírható:

$$L = h \operatorname{tg} \alpha + 2(H-h)/\operatorname{tg} \alpha = (2H-h) \operatorname{tg} \alpha.$$

Figyelembe véve a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}$$

azonosságot, valamint a (225) kifejezést, a következő egyszerű alakot kapjuk:

$$L = \frac{2H-h}{\sqrt{n^2-1}}. \tag{226}$$

Behelyettesítve ebbe az $n = 4/3$ értéket, a keresett távolság:

$$L = \frac{3}{\sqrt{7}}(2H-h).$$

Tanár: Pontosan így van. És mit fog látni a búvár a feje fölött?

Első diák: Közvetlenül maga fölött egy

$$L = \frac{H-h}{n^2-1} = \frac{3}{\sqrt{7}}(H-h)$$

sugarú világos kört lát (lásd 172. ábra). Ezen a körön kívül pedig a tó fenekét látja.

Második diák: Mi történik akkor, ha a tó feneke nem vízszintes, hanem valamely irányban lejt?

Tanár: Ekkor az L távolság értéke természetesen attól is függ, hogy mely irányba néz a búvár. Könnyen beláthatjuk, hogy ez a távolság akkor lesz minimális, ha a búvár a lejtő emelkedési irányába tekint, míg ha ellenkező irányba néz, akkor az maximálisnak adódik. Az előző feladat eredménye akkor lesz igaz, ha a búvár azon irányba tekint, amerre a fenék vízszintes. A lejtős tófenékkel kapcsolatos feladatot (123) önálló megoldásra javaslom.

Első diák: Megváltoztathatjuk-e a fény irányát azzal, ha az útjába átlátszó planparalel lemezeket helyezünk el?

Tanár: Mit gondol?

Első diák: Szerintem elvileg lehetséges, mert a lemezen belül a fénytörés után a nyaláb már más irányt követ.

Második diák: Én más véleményen vagyok. A lemez után ugyanis a fény útja az eredeti iránnyal ismét párhuzamossá válik.

Tanár: Kérem, bizonyítsa ezt be több, különböző törésmutatójú lemez esetén!

Második diák: Vegyünk három lemezt n_1, n_2 és n_3 törésmutatóval. A fénysugár útját a 173. ábrán követhetjük nyomon. A határfelületek mentén a következő törésekkel kell számolni:

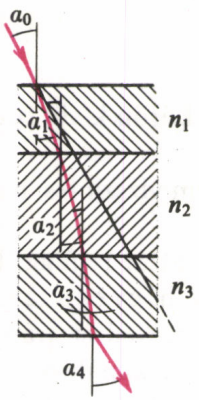
$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} = n_1, \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{n_3}{n_2}, \quad \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_4} = \frac{1}{n_3}.$$

Az egyenlőségek bal és jobb oldalainak összeszorzásával a

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_4} = 1$$

eredményt kapjuk. Ebből viszont $\alpha_0 = \alpha_4$, tehát a sugár iránya nem változik meg.



173. ábra

Tanár: Pontosan így van. Most pedig vitassuk meg a geometriai optika alkalmazhatóságának korlátait.

Második diák: A geometriai optika törvényei a fény hullámhosszának összemérhető és annál kisebb távolságokon érvényüket vesztik. Ilyen kis távolságok esetében már érezteti hatását a fény hullámtermészete.

Tanár: Helyes. Ezt a részt általában a felvételizők is jól tudják. Léte-

zik-e a geometriai optika alkalmazhatóságának másik korlátja, nevezetesen a nagy távolságok oldaláról?

Második diák: Ha a távolság a fény hullámhosszánál nagyobb, akkor a fényt a geometriai optika törvényei alapján vizsgálhatjuk. Korábban ezt így tanultuk. Én úgy gondolom, hogy a nagy távolságok oldaláról a geometriai optika alkalmazhatóságának semmi sem szab határt.

Tanár: Téved! Képzeljük el a következő példát! A kozmikus térbe fénysugarat küldünk. Tegyük fel, hogy 1 másodperc alatt 60°-kal elforgatjuk a fényforrásunkat. Kérdés, mekkora sebességgel kell elmozdulniuk a fényforrásunktól 300 000 km távolságra levő fénypontoknak?

Második diák: Én értem a kérdés lényegét. Ezeknek a pontoknak a fény terjedési sebességét meghaladó sebességgel kell elmozdulniuk. Ez viszont ellentmond a relativitáselméletnek.

Tanár: Látja, hogy a geometriai optika az igen nagy távolságok esetén is hatályát veszíti? Ebben az esetben már azt is figyelembe kell venni, hogy a fénysugár nem más, mint fotonokból álló részecskeáram. A fényforrás elfordítása előtt kibocsátott fotonok semmit sem „tudnak" az elfordulás tényéről és kezdeti irányuknak megfelelően folytatják útjukat. Az új irányban már az új fotonok indulnak el. Tehát a fénysugárnak mint egésznek, semmiféle elfordulása nem megy végbe.

Második diák: És hogyan szabhatjuk meg kvantitatíve a nagy távolságok oldaláról a geometriai optika alkalmazhatósági határát?

Tanár: A távolságoknak olyanoknak kell lenniük, hogy a fény által azok megtételéhez szükséges idő az adott feladatban előfordul összes időnél lényegesen kisebb legyen (pl. sokkal kisebb legyen a fényforrás elforgatási idejénél). Ebben az esetben a nyaláb nem szakad fel, és nyugodtan alkalmazhatók a geometriai optika törvényei.

Feladatok:

122. Egy $d_1 = 5$ cm vastagságú üveglappal és $d_2 = 10$ cm vízréteggel fedett tárgyat függőleges irányból nézünk. A víz felszínétől mért mekkora h távolságra észleljük a tárgy képét, ha az üveg törésmutatója $n_1 = 1{,}6$, a vízé pedig $n_2 = 1{,}33$?

123. A $h = 1{,}8$ m magasságú búvár egy $H = 5$ mélységű tó fenekén

áll. A tófenék lejtése $\alpha = 15°$. Számítsuk ki a fenék azon pontjainak a tartózkodási helytől mért minimális L távolságát, amelyeket a búvár a víz felszínéről történő teljes visszaverődés következtében még láthat!

124. Adott egy $d = 5$ cm vastagságú, $n = 1{,}5$ törésmutatójú üveglemez. A levegőből közelítő fénysugár milyen α beesési szöge esetén lesz az üveg felületén visszavert, illetve megtört sugár egymásra merőleges? Számítsuk ki, ezen α beesési szög esetén, a lemezen áthaladva a nyaláb mekkora x távolságra tolódik el.

125. Adva van egy d vastagságú, n törésmutatójú üveglemez. A levegőből az adott üveg teljes belső visszaverődési szögével azonos szögben érkezik a fény az üveg felületére. Számítsuk ki, hogy a lemezen áthaladva mekkora távolságra tolódik el a fénysugár!

41. GYAKOROLJUK A KÉPSZERKESZTÉST!

Tanár: A felvételi vizsgán gyakran találkozunk olyan esettel, hogy egyes diákok nem képesek helyesen megszerkeszteni a különböző tükrök és lencsék által létrehozott képet. Ezért gyakorlásképpen nézzünk meg együtt néhány példát!

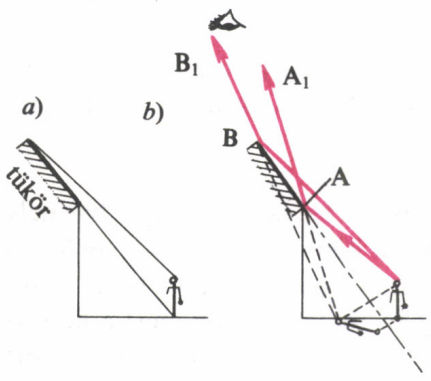
Szerkesszük meg a 174. *a)* ábrán látható embernek az ott bemutatott síktükörben keletkező látszólagos képét.

Első diák: Én úgy gondolom, hogy ebben az esetben nem keletkezik ilyen kép, mivel a tükör igen magasan helyezkedik el.

Tanár: Téved, mert a tükörben létrejön a kép. A szerkesztést a 174. *b)* ábra szemlélteti. Könnyen belátható, hogy **a virtuális kép kép egyszerűen megszerkeszthető oly módon, hogy a tükör síkját meghosszabbítjuk, majd erre a síkra szimmetrikusan leképezzük az ember alaját** (tengelyes tükrözés).

Első diák: És ez az ember meg is fogja látni saját képét?

Tanár: Ez más kérdés. Természetes, hogy jelen esetben nem fogja saját képét látni. Ehhez a tükör valóban túl magasan és nem megfelelő szögben helyezkedik el. Ebben a tükörben emberünk képét azok a



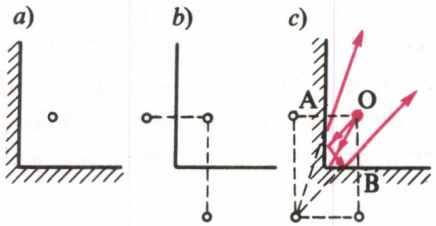
174. ábra

megfigyelők tudják észlelni, akik az AA_1 és BB_1 sugarak által bezárt szög tartományában foglalnak helyet. Célszerű itt felidézni emlékezetünkbe, hogy **a tárgytól a megfigyelő szeméhez széttartó fénysugaraknak kell eljutni. Az emberi szem a tárgy képét ezen sugarak vagy képzeletbeli folytatásuk metszéspontjában észleli** (lásd 171. és 174. *b)* ábra).

Szerkesszük meg a 175. *a)* ábrán bemutatott, két egymásra merőleges tükörből álló rendszerben a tárgy képét!

Első diák: A két tükör síkjára egyszerűen leképezzük a tárgy képét, amint azt a 175. *b)* ábra mutatja.

Tanár: Még egy, harmadik kép is keletkezik, amelyről megfeledkezett. Tessék csak jobban megnézni, hogy a 175. *c)* ábrán az AOB szögön belül eső sugarak kétszeres visszaverődést szenvednek: előbb az egyik, majd a másik tükörről. A 175. *c)* ábra két ilyen sugár útját szemlélteti. Ezeknek a sugaraknak a folytatása adja meg a tárgy harmadik képét.



175. ábra

Most pedig lássunk néhány gyűjtőlencsés példát!

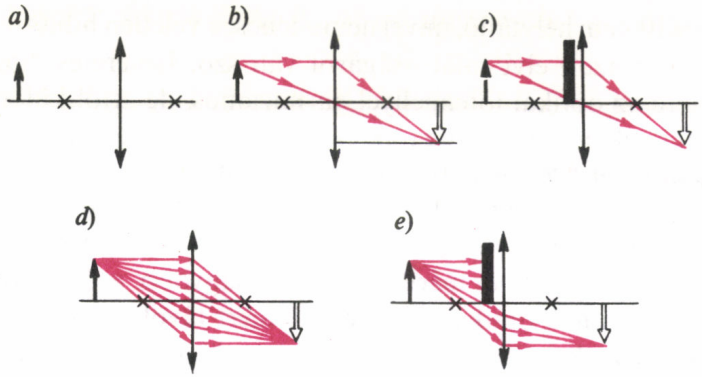
Szerkesszük meg a 176. *a)* ábrán bemutatott példában a tárgy képét!

Első diák: Ez nagyon egyszerű. A szerkesztést a 176. *b)* ábrán rajzoltam meg.

Tanár: Helyes. Most tételezzük fel, hogy a lencse egyik felét a 176. *c)* ábrán bemutatott módon egy átlátszatlan lemezzel eltakarjuk. Mi történik ekkor az ábrázolt képpel?

Első diák: Ekkor a kép eltűnik.

Tanár: Ez tévedés. Megfeledkezik arról, hogy a tárgy bármely pontjának (pl. a nyíl hegyének) a képe nem kettő, hanem végtelen számú sugár metszeteként jön létre (176. *d)* ábra). Rendszerint azért elégszünk meg két sugár ábrázolásával, mert a kép helyzetének megszerkesztéséhez ez is elegendő. Esetünkben a lemez elta-

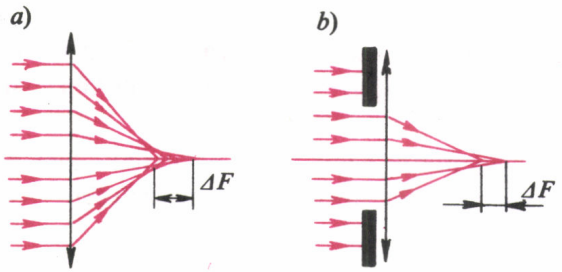


176. ábra

karja a lencsére eső sugarak egy részét, de nem az egészet. Így a sugarak egy része átjutva a lencsén, létrehozza a mögött a tárgy képét (176. *e)* ábra). Mivel a kép létrehozásában most kevesebb sugár vesz részt, a különbség csak annyi, hogy a kép kevésbé lesz világos.

Második diák: Tanár Úr magyarázata alapján úgy értelmezhető, hogy ha a lencse egy részét átlátszatlan lemezzel eltakarjuk, akkor mindössze csak az ábrázolt kép fényessége változik, semmi más. A fotósok közül viszont mindenki tudja, hogy a fényképezőgép blendéjének szűkítésekor, azaz ha a lencse felületének egy részét eltakarjuk, a fényerő csökkenése mellett egy másik jelenség is megfigyelhető, nevezetesen, az ábrázolt kép határvonalai élesebbek lesznek. Ez mivel magyarázhat?

Tanár: Ez a kérdés pontosan idevág. Egyúttal lehetőséget nyújt arra is, hogy a következő tényezőre felhívjam a figyelmet: az összes szerkesztési műveletet az optikai rendszerek (jelen esetben a lencse) hibáinak figyelmen kívül hagyásával végezzük. Igaz, hogy a „hiba"



177. ábra

kifejezés itt nem helytálló, mivel nem a lencsék véletlen hibáiról, sokkal inkább azok elvi sajátosságáról van szó. Ismeretes, hogy ha a lencsére az optikai főtengellyel párhuzamos, de attól különböző távolságra elhelyezkedő sugarak esnek, akkor ezek a lencse mögött nem pontosan azonos helyen metszik a főtengelyt (177. *a)* ábra), azaz a lencse fókusza (a főtengellyel párhuzamos sugarak metszéspontja) elmosódottá válik, a tárgy képe pedig életlen lesz. Az életlenség annál nagyobb mértékű, minél nagyobb a fénynyalábot alkotó sugarainak optikai főtengelytől mért távolságának különbsége. Blendézéskor a lencsén keskenyebb nyaláb jut keresztül, ennek következtében valamivel élesebb képet kapunk (177. *b)* ábra).

Második diák: Tehát végeredményben a blendézéssel csökkentjük a fényerőt azért, hogy élesebb képet kapjunk?

Tanár: Pontosan így van. Aggodalomra azonban nincs ok, mert a felvételi vizsgázóknak jogában áll azon elméleti megfontolások alapján szerkeszteni a lencsék által keltett képet, amelyik szerint **a párhuzamos sugarak mindig egy pontban metszik egymást. Ez a pont az optikai főtengelyen fekszik, ha a sugarak a főtengellyel párhuzamosan esnek a lencsére, illetve a fókusz síkjába kerül akkor, ha a sugarak a főtengellyel valamilyen szöget zárnak be.**

Annyi azért fontos, hogy a felvételiző tudatában legyen: ez az eljárás csak bizonyos közelítéssel érvényes, és pontosabb vizsgálódás esetén az optikai rendszerek hibái miatt helyesbítésre szorul.

Első diák: Mit kell érteni a lencse fókuszsíkja alatt?

Tanár: A fókuszsík a lencse optikai főtengelyére merőleges, a fókuszon átmenő sík. Vizsgáljuk meg, mennyiben tér el a síktükörben keletkező kép a 176. ábrán illusztrált példában a gyűjtőlencsével létrehozott képtől.

Első diák: A tükörben virtuális (látszólagos), míg a lencse mögött valódi kép keletkezik.

Tanár: Helyes. Kérem, fejtsék ki egy kicsit részletesebben, mi a különbség a virtuális és a valódi kép között!

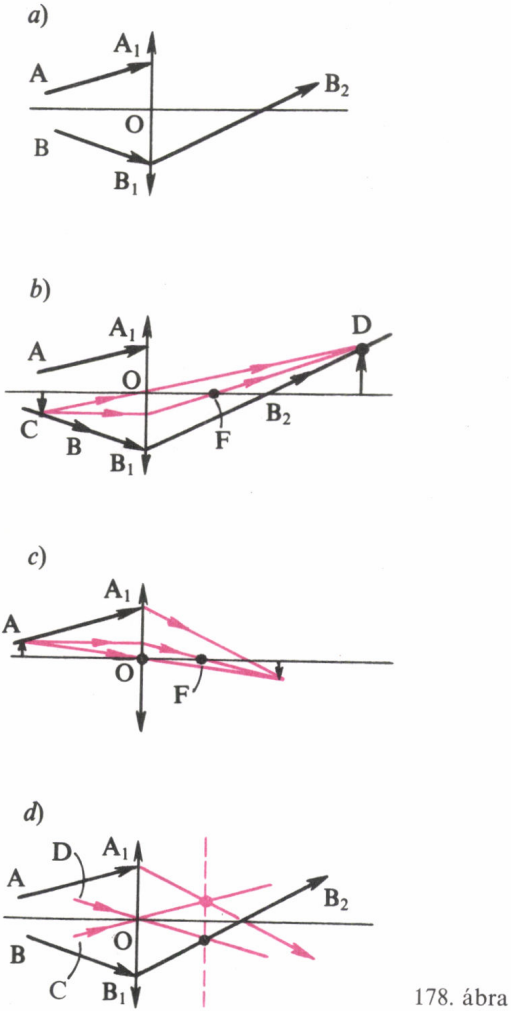
Második diák: **A virtuális kép nem a fénysugarak, hanem azok meghosszabbításának metszéseként jön létre, míg a valódi kép a sugarak metszeteként keletkezik.**

Ezért nem szabad meglepődni azon, hogy a virtuális kép valahol pl. egy fal mögött is képződhet, ahová – természetesen – a fénysugarak nem juthatnának el.

Tanár: Helyes. Tegyük még hozzá, hogy **a virtuális képet csak megha-**

tározott helyekről észlelhetjük. Valódi kép esetén viszont a kép helyére egy lemezt helyezve, a kép bármely helyzetből látható. **Szerkesszük meg a 178.** *a)* **ábra alapján az AA_1 sugár útjának a gyűjtőlencsén való áthaladás utáni szakaszát, ha ismert egy másik, BB_1B_2 sugár útja!**

Első diák: És a lencse fókusztávolságát nem ismerjük?



178. ábra

Tanár: Azt nem, viszont a BB_1B_2 szakaszok megadják egy sugár teljes útját a lencse előtt és után.

Első diák: Ilyen példával mi soha nem foglalkozhatunk.

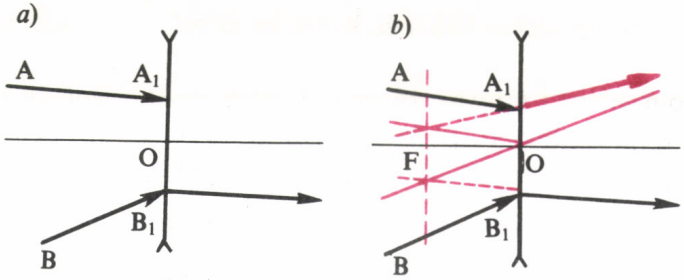
Második diák: Én azt hiszem, hogy először meg kell keresnünk a lencse fókusztávolságát. Rajzoljunk a lencsétől balra egy olyan tárgyat, amelynek a csúcsa éppen a BB_1 sugárra esik. Jelöljük ezt a végpontot C-vel (178. *b)* ábra). A C pontból húzzuk meg a lencse középpontján átmenő sugarat. Ez a sugár törésmentesen halad át a lencsén és a D pontban metszi a B_1B_2 sugarat. Világos, hogy a D pont a nyíltárgyunk végpontjának képe lesz. Ezután a tárgy C végpontjából meghúzzuk a főtengellyel párhuzamos sugarat, amely a lencse mögött szintén a nyíl végpontjának képén, azaz a D ponton megy át. Ennek a sugárnak a főtengellyel alkotott metszéspontja egyben a lencse fókuszát szolgáltatja. A szerkesztést a 178. *b)* ábra szemlélteti.

Ezek után, a fókusz ismeretében már megszerkeszthetjük az AA_1 sugár útját a lencse mögött. Ehhez most egy újabb nyilat rajzolunk, amelynek a végpontja az AA_1 sugárra esik (178. *c)* ábra). A fókusz segítségével megszerkesztjük a tárgy képét. A kérdéses sugárszakasz az A_1, illetve a tárgy képének végpontján keresztül halad. A szerkesztést a 178. *c)* ábra szemlélteti.

Tanár: Teljesen helytálló ez a megoldás. Megjegyzem, hogy a segédtárgymódszer abban az esetben is eredményesen alkalmazható, ha például a lencse főtengelyén elhelyezkedő pontszerű fényforrás képének helyzetét kell meghatároznunk. Ekkor a fényforrás helyére célszerű a nyilat állítani és megszerkeszteni annak a képét. Világos, hogy a nyíl alsó pontjának képe egyben a fényforrásunk képét szolgáltatja. A fenti példa megoldása során alkalmazott szerkesztési eljárás azonban kissé hosszadalmas. Mutatok erre egy egyszerűbb módszert. A fókusztávolságot oly módon határozom meg, hogy a lencse középpontján át a BB_1 sugárral párhuzamosan egy DO sugarat húzok (178. *d)* ábra). Mivel a két sugár párhuzamos, a lencse mögött a fókusz síkjában metszi egymást (a 178. *d)* ábrán a fókusz síkját szaggatott vonallal jelöltük). Ezt követően a lencse középpontján át meghúzom az AA_1 sugárral párhuzamos CO sugarat. Mivel ennek a két sugárnak is a fókusz síkjában kell egymást metszenie, a CO sugár és a fókusz síkjának metszéspontja megadja az AA_1 sugárnak a lencsétől jobbra eső irányát. Látható, hogy ez a módszer sokkal egyszerűbb.

Második diák: Valóban, ez lényegesen könnyebb szerkesztési eljárás.

Tanár: Oldjuk meg ezzel a módszerrel a 179. *a)* ábrán bemutatott hasonló feladatot, ahol viszont a lencse konkáv (szóró)!



179. ábra

Második diák: Meghúzom a lencse középpontján át a BB_1 sugárral párhuzamos sugarat (179. *b)* ábra). Az előző feladattól eltérően, most nem maguk a sugarak, hanem azok képzeletbeli meghosszabbításai metszik egymást (kivéve természetesen a lencse középpontján áthaladó sugarat, amely egyben valós sugár is). Tehát a metszéspontokat magában foglaló fókuszsík most a lencsétől balra helyezkedik el (179. *b)* ábrán szaggatott vonal).

Tanár: Közbevetőleg jegyezném meg, hogy **a konkáv (szóró) lencsék által keltett kép mindig képzetes.**

Folytassa!

Második diák: Ezt követően a lencse középpontján át az AA_1-gyel párhuzamost húzok, majd abból kiindulva, hogy ezeknek a sugaraknak a meghosszabbításai a fókusz síkjában metszik egymást, meg tudom szerkeszteni a keresett sugarat.

Tanár: Rendben van. Válaszoljon kérem szóban a következő kérdésre: hol fog elhelyezkedni annak a tárgynak a képe, amelynek egy része a konvex (gyűjtő) lencse fókusztávolságán túl, más része pedig azon belül helyezkedik el. Maga a tárgy véges szélességű.

Második diák: Meg kell szerkesztenünk a tárgynak a lencsétől különböző távolságra elhelyezkedő pontjainak képét. A fókuszon kívül levő pontok a lencsén túl (jobbra) valós képet adnak, míg a fókuszon belüli pontok a lencsétől balra virtuális képet szolgáltatnak. Ahogyan a tárgy pontjaival a fókuszhoz közelítünk, a kép úgy fog a végtelenbe (balra, illetve jobbra) távolodni.

Tanár: Kiváló. Tehát ilyen esetben a tárgy képe két részből áll (a lencsétől balra, illetve jobbra). Ezek mindegyike a lencsétől egy adott, véges távolságra kezdődik és a végtelenig terjed. Tehát bármennyire paradox módon hangzik is, arra a kérdésre, hogy „létezhet-e

egy tárgynak egyszerre valós és képzetes képe", – igenlő válasz adható.

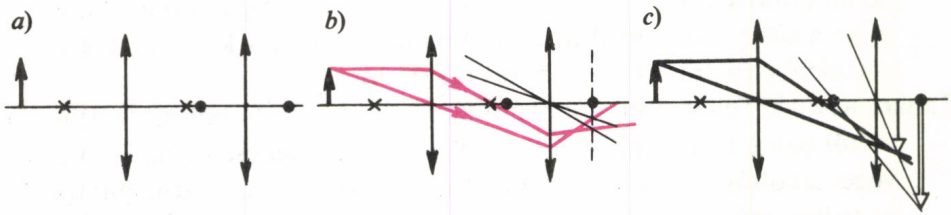
Úgy látom, hogy a tárgyak képének szerkesztését a lencsék esetében jól elsajátították. Térjünk át ezért az összetettebb feladatokra, amikor két lencséből álló rendszert kell vizsgálni.

Adva van két konvex lencse, amelyeknek optikai tengelye egybeesik, fókusztávolságuk azonban eltérő. Szerkesszük meg a 180. *a)* **ábrán bemutatott függőleges nyíl képét ebben a rendszerben, ha az első lencse fókuszait a csillagok, a másodikét pedig a pontok jelölik.**

Második diák: A két lencséből álló rendszerben egy tárgy képét úgy kaphatjuk meg, ha előbb teljesen figyelmen kívül hagyjuk a második lencsét, és megszerkesztjük az első lencse által szolgáltatott képet. A továbbiakban ezt a képet mint tárgyat tekintjük és most ennek a képét a második lencse mögött szerkesztjük meg, figyelmen kívül hagyva természetesen az első lencsét.

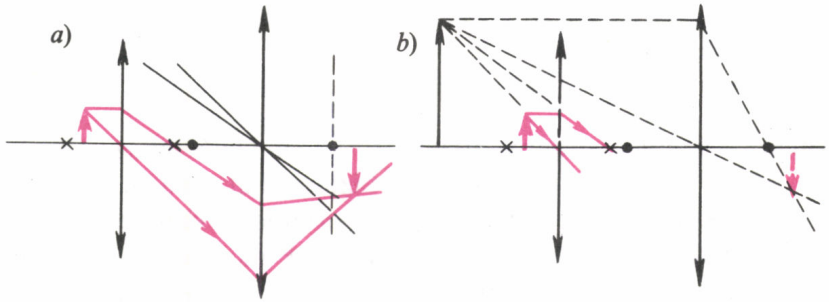
Tanár: Elkövette azt a hibát, amellyel oly gyakran találkozik az ember. Vizsgáljuk meg a nyíl csúcsából kiinduló két sugár útját (180. *b)* ábra). A sugár útját az első lencse után egyszerű megszerkeszteni. A sugaraknak a második lencse mögötti szakaszait a korábban ismertetett módszer segítségével kapjuk: a sugarakkal párhuzamosakat húzunk a második lencse középpontján át. A sugarakat a fókuszsík és a megfelelő segédegyenesek metszéspontjaival összekötve adódik a nyíl csúcsának képe. A szerkesztés menetét a 180. *b)* ábra szemlélteti. Most pedig lássuk, milyen eredményre jutottunk volna az Ön által javasolt módszerrel! Ezt a szerkesztést a 180. *c)* ábra mutatja. A vastag vonalak jelölik az első lencséhez, a vékonyabb vonalak pedig a második lencséhez tartozó sugarakat. Látható, hogy egészen más – helytelen! – eredményt kapunk.

Második diák: Pedig én határozottan emlékszem, hogyan oldottunk meg feladatot pontosan azzal a módszerrel, ahogyan én elmondtam.



180. ábra

Tanár: Ez lehetséges. Az a helyzet ugyanis, hogy néhány egyedi esetben az említett módszer is helyes eredményre vezet. A két eredmény például akkor esik egybe, ha a nyilat az első lencséhez közelebb hozzuk, a fókuszon belülre. A 181. *a)* ábra az én módszerem, a 181. *b)* ábra pedig a másik módszer szerinti megoldást mutatja. Láthatjuk, hogy a két eredmény most egybeesik.



181. ábra

Második diák: És honnan lehet azt tudni, hogy mely esetekben alkalmazható az én módszerem?

Tanár: Két lencsére egyszerűen megfogalmazhatnánk ezeket a feltételeket, ennél nagyobb számú lencsére azonban rendkívül összetett lenne a feladat. Ezért nincs értelme ezzel foglalkozni. Használják mindig az általam javasolt módszert, akkor biztosan helyes eredményt kapnak.

Befejezésül még egy kérdés: lehet-e a bikonkáv lencse gyűjtőlencse?

Második diák: Erre én emlékszem. A bikonkáv lencse általános esetben szórólencse. Ha azonban a lencse anyagának törésmutatójánál nagyobb törésmutatójú közegbe helyezzük azt, akkor gyűjtőlencsévé válik.

42. RENDSZEREZZÜK AZ OPTIKAI FELADATOKAT!

Tanár: Szeretnék néhány általános, összefoglaló jellegű megjegyzést tenni, amelyek igen hasznosnak bizonyulhatnak a különféle lencsékkel és gömbtükrökkel (homorú és domború) kapcsolatos feladatok megoldása során. Az optikai feladatok megoldásánál alkalmazott képleteket két csoportra oszthatjuk. Az *első csoport*hoz azokat a képleteket soroljuk, amelyek a lencse (tükör) f fókusztávolsága, a t tárgytávolság és a k képtávolság közötti összefüggést adják meg:

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{t}=\frac{1}{f}, \tag{227}$$

A képletben k, t és f algebrai értékként szerepelnek, azaz a különböző esetekben ezek előjele különböző lehet. Ezeket az eseteket három csoportba sorolhatjuk a következő táblázat szerint:

Gyűjtőlencsék és homorú tükrök:	
$k > f$	$t < f$
1. $t > 0$, $f > 0$, $k > 0$ valós kép	2. $t > 0$, $f > 0$, $k < 0$ virtuális kép
Szórólencsék és domború tükrök:	
3. $t > 0$, $f < 0$, $k < 0$ virtuális kép	

Tehát t értéke mindig pozitív. Az f fókusztávolság értéke gyűjtőlencsék és homorú tükrök esetén pozitív, szórólencsék és domború tükrök esetén pedig negatív. A k képtávolság valós képek esetén pozitív, virtuális képek esetén pedig negatív.

Első diák: Ha jól értettem, akkor a táblázat alapján a (227) általános kifejezésből három külön képletet kapunk, ha az egyes értékeket saját előjelükkel együtt helyettesítjük be:

$$\text{1. eset: } \frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}$$

$$\text{2. eset: } \frac{1}{t}-\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \qquad (228)$$

$$\text{3. eset: } \frac{1}{t}-\frac{1}{k}=-\frac{1}{f}.$$

Tanár: Pontosan így van.

Első diák: Korábban valahogy elkerülte figyelmemet a lencsék és a nekik megfelelő gömbtükrök közötti hasonlóság.

Tanár: A *második csoport*hoz azokat a kifejezéseket sorolhatjuk, amelyek a lencse (tükör) fókusztávolsága és egyéb paraméterei közötti összefüggést adják meg. A tükrökre a következő egyszerű kifejezés érvényes:

$$f=\pm\frac{R}{2}, \qquad (229)$$

ahol: R a tükör görbületi sugara. A plusz előjel a homorú, a mínusz pedig a domború lencséhez tartozik.

A lencsékre a következő kifejezés vonatkozik:

$$\frac{1}{f}=\left(n-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \qquad (230)$$

ahol: n a lencse anyagának törésmutatója, R_1 és R_2 pedig a lencse görbületi sugarai. Ha az R a lencse domború oldalához tartozik, akkor plusz, ha a homorú oldalához, akkor pedig mínusz előjellel kell venni. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a bikonvex, a plánkonvex és a konkávkonvex lencsék gyűjtőlencsék, ugyanis a (230) kifejezés alapján ezek fókusztávolsága pozitív.

Első diák: Hogyan változik meg a (230) kifejezés, ha a lencsét egy n_0 törésmutatójú közegbe helyezzük?

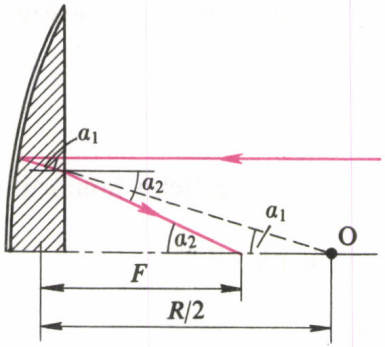
Tanár: Ekkor a (230) kifejezés a következő alakot ölti:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_0} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{231}$$

Ha a fény az optikailag ritkább közeg ($n_0 < n$) helyett az optikailag sűrűbb közegből ($n_0 > n$) megy át, akkor a (231) kifejezés értelmében a fókusztávolság előjelet vált, ezért a gyűjtőlencséből szóró-, míg a szórólencséből gyűjtőlencse lesz. Lássunk néhány konkrét példát!

Egy plánkonvex lencse domború oldalára, amelynek a görbületi sugara R, az anyag törésmutatója pedig n, ezüstöt gőzölünk. Számítsuk ki az ily módon kapott különleges homorú tükör fókusztávolságát!

Első diák: Hadd próbálkozzam én. Vegyünk egy, az optikai főtengellyel párhuzamos fénysugarat. Miután a sugár a lencse ezüstözött felületéről visszaverődött, kilép a lencséből és fénytörést szenved (182. ábra). Ha a sugár nem törne meg, akkor a (229) kifejezés alapján



182. ábra

a tükörtől $R/2$ távolságra metszené a főtengelyt. A fénytörés következtében azonban a sugár a tükörhöz ennél valamivel közelebb metszi a tengelyt. Jelöljük a kérdéses fókusztávolságot f-fel. Az ábráról leolvasható, hogy:

$$\frac{R}{2} \operatorname{tg} \alpha_1 = f \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Mivel az α_1 és α_2 szögek értéke kicsi, alkalmazhatjuk a (223) közelítést, tehát:

$$\frac{R}{2f} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} \approx \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = n.$$

A fókusztávolság pedig:

$$f = \frac{1}{n} \cdot \frac{R}{2}. \tag{232}$$

Második diák: Én más megoldást javasolnék. Ismeretes, hogy ha egy f_1 és egy f_2 fókusztávolságú optikai rendszert egyesítünk, akkor az így kapott rendszer f fókusztávolságát a következő egyenlettel határozhatjuk meg:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \tag{233}$$

A vizsgált lencse esetében a (230) kifejezés alapján a fókusztávolságot az

$$f_1 = \frac{R}{n-1}$$

kifejezés adja meg, ahol az egyik görbületi sugarat végtelen értékűnek vettük, míg a homorú tükör fókusztávolsága: $f_2 = R/2$. Behelyettesítve ezeket az értékeket a (223) kifejezésbe:

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R} + \frac{2}{R}, \tag{234}$$

megkapjuk a keresett fókusztávolságot:

$$f = \frac{R}{n+1}. \tag{235}$$

Ezt összevetve a (232) eredménnyel kiderül, hogy az előző megoldás rossz.

Tanár: (második diákhoz): Csodálkozni fog, mert a (232) eredmény a helyes, és ön hibázott.

Második diák: Miért? A (233) kifejezés erre az esetre nem érvényes?

Tanár: De igen.

Második diák: Ha viszont a (233) érvényes, akkor a (234) is az, nemde?

Tanár: Pontosan itt követte el a hibát. Figyelmen kívül hagyta ugyanis, hogy a sugár (oda-vissza) kétszer megy át a lencsén. Ezért egy tükör és két (!) lencse összegezésével kapjuk a helyes kifejezést:

$$\frac{1}{f} = 2\frac{n-1}{R} + \frac{2}{R}.$$

Elvégezzük a kijelölt műveleteket:

$$\frac{1}{f} = \frac{2n-2+2}{R},$$

majd megkapjuk a végső eredményt:

$$f = \frac{R}{2n},$$

ami teljesen azonos a (232) kifejezéssel.

Lássunk egy másik példát!

Egy gyűjtőlencse a tárgy képét négyszeres nagyításban adja. Ha a tárgyat 5 cm-rel elmozdítjuk, a nagyítás kétszeresére csökken. Számítsuk ki a lencse fókusztávolságát!

Első diák: Ezeket a példákat én mindig eltévesztem. Tudom, hogy meg kell szerkeszteni a képet az első és a második helyzetben, majd a kettőt egybevetni.

Tanár: Szerintem viszont jelen esetben nincs szükség szerkesztésre. A (227) kifejezés alapján az első helyzetre felírható:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1}.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\frac{k_1}{t_1} = N_1$$

az első helyzetben a nagyítási tényező, felírható a következő egyenlet:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{N_1 t_1} = \frac{N_1 + 1}{N_1 t_1},$$

illetve:

$$t_1 = f\frac{N_1 + 1}{N_1}.$$

Hasonlóképpen a második helyzetre:

$$t_2 = f\frac{N_2 + 1}{N_2}.$$

Tehát:

$$t_2 - t_1 = f\frac{N_1 - N_2}{N_1 \cdot N_2}. \tag{236}$$

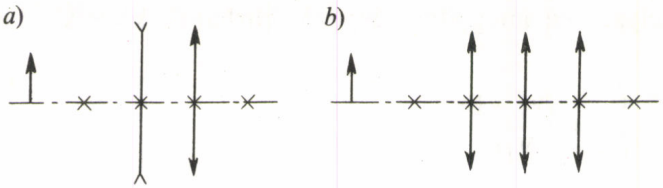
Az ismert $t_2 - t_1 = 5$ cm, $N_1 = 4$, $N_2 = 2$ adatokat behelyettesítve kapjuk a keresett fókusztávolság értékét: $f = 20$ cm.

Feladatok:

126. Az $f = 30$ cm fókusztávolságú lencse a tárgy N_1-szeresére kicsinyített ($N_1 = 1{,}5$), virutális képét állítja elő. Milyen típusú ez a lencse: gyűjtő vagy szóró? Hol helyezkedik el a tárgy? Hol és milyen (N_2) nagyságú lesz a kép, ha a lencsét $l = 20$ cm-rel elmozdítjuk?

127. Az $R = 50$ cm görbületi sugarú homorú tükörtől $t = 15$ cm távolságra az optikai tengelyen egy pontszerű fényforrás található. Hol keletkezik a pont képe? Mi történik a képpel, ha a tükröt a ponttól $l = 15$ cm-rel távolabb visszük?

128. Egy szóró és egy gyűjtőlencséből összeállítottunk egy optikát. (183. *a)* ábra. Az x jelek a fókuszokat jelölik). Mindkét lencse fókusztávolsága $f = 40$ cm. A tárgy a szórólencse előtt, attól kétszeres fókusztávolságra helyezkedik el. Szerkesszük meg a tárgy képét, és számítsuk ki a helyét!



183. ábra

129. A 183. *b)* ábra a három, teljesen azonos gyűjtőlencséből álló optikát ábrázolja. A lencsék fókusztávolsága: $f = 30$ cm. A tárgy a szélső lencsétől $t = 60$ cm távolságra található. Hol képződik a tárgy képe?

130. Egy plánkonvex lencse $R = 60$ cm-es görbületi sugarú domború oldalára ezüstöt gőzölve különleges homorú tükröt állítottunk elő. A tükör előtt, attól $t = 25$ cm távolságra egy tárgyat helyezünk el. Számítsuk ki, mekkora k távolságra keletkezik a tárgy képe, illetve az N nagyítás értékét, ha a lencse anyagának törésmutatója: $n_0 = 1{,}5$!

131. Egy plánkonkáv lencse $R = 50$ cm-es görbületi sugarú homorú oldalára ezüstöt gőzölve különleges domború tükröt állítottunk elő. A tükör előtt, attól $t = 10$ cm távolságra egy tárgyat helyezünk el. Számítsuk ki, mekkora k távolságra keletkezik a tárgy képe, illetve az N nagyítás értékét, ha a lencse anyagának törésmutatója $n_0 = 1{,}5$!

43. A MEGMARADÁSI TÖRVÉNYEK ALAPJÁN PRÓBÁLJUNK EGY KICSIT SZABADABBAN GONDOLKODNI!

Tanár: Az eddigiek során fejezetekre bontva vettük át a középiskolás fizika anyagát. Kezdtük a mechanikával, majd a hidrosztatika, a hőtan, a gáztörvények, az elektromosság, a mágnesség és végül az optika következett. Minden egyes fejezetben az adott tárgykörre jellemző sajátos, specifikus paramétereket és törvényszerűségeket vizsgáltuk. Most próbáljunk egy kicsit szabadabban gondolkodni, mintegy fölemelkedni az egyes fejezeteket egymástól elkülönítő „határvonalak" fölé! Beszélgetésünk tárgyául válasszuk a megmaradási törvényeket. Az első kérdés tehát, milyen megmaradási törvényeket ismerünk.

Első diák: Az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás törvényét.

Második diák: Létezik még az elektromos töltés megmaradásának törvénye is. Ezenkívül van még a tömegmegmaradás törvénye, ezt azonban az Einstein-féle $E = mc^2$, energiatömeg ekvivalenciát kifejező képlet alapján az energiamegmaradás törvényéhez is kapcsolhatjuk.

Tanár: Nem először tapasztalom, hogy a tanulók egy igen fontos megmaradási törvényének, nevezetesen az impulzusmomentumú megmaradási törvényének még a létezésével sincsenek tisztában.

Második diák: Mi tanultunk az erő nyomatékáról, de az impulzus nyomatékáról nem volt szó.

Tanár: Az impulzusmomentumot a következő egyszerű példával szemlélhetjük: egy pontszerű m tömegű test egy r sugarú kör mentén v sebességgel mozog. Vezessük be az r vektort, amely a kör középpontjából indul ki, és az m testben végződik. Ekkor az adott test $\mathbf{M}$ impulzusmomentumát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\mathbf{M} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \tag{237}$$

(Itt ismét a mágnesség vizsgálata során megismert vektori szorzattal állunk szemben.) A (237) egyenletből leolvasható, hogy az $\mathbf{M}$

vektor a kör síkjára merőleges irányú, nagyságát pedig az $M = mvr$ szorzat adja meg. Ha a pontszerű test helyett egy véges kiterjedésű, a saját tengelye körül is forgó reális testet veszünk, akkor a (237) kifejezést egy összetettebb egyenlettel kell felváltanunk, amely már azt a tényt is figyelembe veszi, hogy a test egyes „elemei" a forgástengelytől különböző távolságra, eltérő kerületi sebességgel mozognak. A viszonylag egyszerű (237) kifejezés alapján is levonhatjuk azonban néhány érdekes következtetést, amelyek az impulzusmomentum megmaradási törvényéből fakadnak. Egyrészt a (237) kifejezésből látszik, hogy az **M** vektor irányának a test forgási tengelyével kell egybeesnie. Tehát **az impulzusmomentum megmaradási törvénye magában foglalja azt is, hogy a forgó test forgási tengelyének térbeli orientációja sem változik.**

Ezt a jelenséget pörgettyűknél és giroszkópoknál használják. **Másrészt viszont az energiamegmaradás törvényéből adódik, hogy ha a test egyes elemeinek a forgási tengelyhez viszonyított helyzete megváltozik, akkor az ω szögsebességnek is meg kell változnia.** Visszatérve a (237) kifejezéshez felírhatjuk, hogy $M = mvr = m\omega r^2$. Ebből viszont leolvasható, hogy ha az m tömeg valamilyen oknál fogva (természetesen nem külső tényező hatására, mert az egyben a vizsgált rendszer autonómiáját sértené) közelebb kerül a kör középpontjához, akkor az ω szögsebességnek növekednie kell. Ezzel kapcsolatos az a műkorcsolyázásban jól ismert tény is, hogy ha a műkorcsolyázó egy helyben forog, amint a kezét a testéhez szorítja, szögsebessége rögtön megnő, illetve ha oldalt kinyújtja karját, a forgása lelassul.

Második diák: Tehát tulajdonképpen mindannyian régen tapasztaljuk az impulzusmomentum megmaradási törvényét, hiszen a pörgettyűt és a műkorcsolyázást is gyermekkortól kezdve ismerjük, csupán tudatosan nem figyeltünk fel rá.

Tanár: Önkéntelenül is Molière *Úrhatnám polgár*a jut az ember eszébe, aki ily módon kiált fel: „Így hát egész életemben prózában beszéltem, és nem is tudtam!"

Javaslom, a továbbiakban gondolkodjanak egy kicsit azon, miért nevezik a megmaradási törvényeket fundamentális törvényszerűségeknek!

Első diák: Mert azok mindig teljesülnek.

Második diák: Mert széles körben alkalmazhatók.

Tanár: Az első felelet semmire sem ad választ. A második felelet már

jobb. Emlékezzünk csak vissza, korábbi beszélgetéseink során hol és mivel kapcsolatban volt szó az energia és az impulzus megmaradásának törvényéről.

Második diák: Először a mechanika tárgyalásakor külön témaként vizsgáltuk ezeket a törvényeket. Azután, ha jól emlékszem, szó volt arról, hogy Arkhimédész törvénye is bebizonyítható az energiamegmaradás törvényéből kiindulva. A termodinamika első főtétele tulajdonképpen nem más, mint az energiamegmaradás törvénye. Emlékszem továbbá, hogy az áramelemek kölcsönhatásának vizsgálatánál is alkalmaztuk a mozgásmennyiség megmaradásának törvényét az elektromágneses hullámok létezésének bizonyítására.

Tanár: Azt hiszem, a fenti példák meggyőzően szemléltetik, mennyire fundamentális jellegűek a megmaradási törvények. A legtöbb megmaradási törvény fundamentális jellege azonban konkrét, pontos magyarázattal bír, amelyet – úgy tűnik – nem ismernek. Három megmaradási törvényt említek meg: **Az energia-, az impulzus- és az impulzusmomentum megmaradási törvényét. A lényeg a következő: ezek a megmaradási törvények a tér és idő szimmetriájának meghatározott tulajdonságaiból következnek.**

Kezdjük az idővel! Bizonyára jól tudják, hogy fizikai értelemben minden időpont egyenrangú, azaz (ha a gyakorlati szempontokból eltekintünk) bármely pillanat lehet a kísérlet kezdeti időpontja, amelytől kezdve mérjük az időt. Amikor a fizikai kísérlet kezdeti idejét kiválasztjuk, szabadon mozoghatunk az időskálán, mert ettől semmi sem fog megváltozni (ez nincs hatással a vizsgált fizikai jelenség lefolyására). Ezt úgy szokták kifejezni, hogy az idő az ilyen elmozdulásokra invariáns, vagyis az idő homogén.

Jegyezzük meg, hogy az idő homogenitásának egyenes következménye az energiamegmaradás törvénye. Pontosan ebben rejlik annak fundamentális jellege. Világos, hogy aki kétségbe vonja az energiamegmaradás törvényét, az egyben az idő homogenitását mint alapvető tényezőt is tagadja.

Második diák: Hogyan lehetne ezt szemléltetni?

Tanár: A középiskolás anyagra támaszkodva ezt nem lehet bemutatni. Ezért elégedjünk meg azzal, hogy konstatáljuk a tényt, miszerint az idő homogenitása az energia megmaradásának felel meg. Kíséreljük meg most ennek alapján meghatározni az energiát!

Második diák: **Az energia olyan fizikai mennyiség, amelynek megmaradása az idő homogenitásának a következménye.**

Tanár: Nagyon helyes. Most pedig térjünk át a térre! Fizikai szempontból a tér minden egyes pontja egyenrangú, így (ha a gyakorlati szempontoktól ismét eltekintünk), a tér bármely pontját teljesen azonos alapon választhatjuk a koordináta-rendszer kezdőpontjául. A kezdőpont kiválasztásakor teljesen szabadon mozoghatunk a térben, mivel a tér az elmozdulásokra invariáns, vagyis a tér homogén. A tér homogenitásának egyenes következménye az impulzus megmaradásának törvénye. De ne feledjük, hogy míg az idő egydimenziós, addig a tér háromdimenziós. A tér háromdimenziós voltának (a három irányú elmozdulási lehetőségnek) következménye az impulzus megmaradási törvényének vektoriális jellege.

Második diák: Úgy fogalmazhatjuk tehát, hogy **a mozgásmennyiség olyan fizikai mennyiség, amelynek megmaradása a tér homogenitásának következménye.**

Első diák: Szerintem a mozgásmennyiség korábbi, a tömeg és a sebesség szorzataként való meghatározása egyszerűbb.

Tanár: Később majd részletesen kitérünk rá, hogy ez a meghatározás azonban nem tekinthető általánosnak. Most viszont említsük meg a tér szimmetriájának még egy fontos tulajdonságát, nevezetesen, hogy a tér nem csupán homogén, hanem ezen túlmenően még izotrop is, azaz az elfordulások tekintetében is szimmetrikus. Ez azt jelenti, hogy fizikai szempontból a tér minden iránya egyenrangú. A tér izotrop voltának egyenes következménye az impulzusmomentum megmaradási törvénye, amelynek – könnyen belátható – szintén vektoriálisnak kell lennie.

Tehát egyrészt az idő és a tér homogenitása, illetve a tér izotrop jellege a tér és az idő szimmetriájának alapvető tulajdonsága. Másrészt viszont az energiamegmaradás, az impulzus és az impulzusmomentum megmaradási törvénye – fundamentális fizikai törvények.

Második diák: Meg kell mondanom, hogy összefüggéseiben ennyire világosan még nem találkoztam ennek kifejtésével. A megmaradási törvények fundamentális jellege így már valóban érthetővé válik.

Tanár: Ez örvendetes. Tehát legalább három alapvető fizikai mennyiség: az energia, az impulzus és az impulzusmomentum létezését szögezhetjük le. Azt is mondhatjuk, hogy ezek a mennyiségek a fizika legkülönbözőbb területéről vett jelenségek vizsgálatakor „előfordulnak", és mindig van értelmük. Természetesen a különféle helyzetekben különböző mennyiségekkel hozhatók összefüggésbe, ame-

lyek közül igen sok viszont csak az egyik vagy másik konkrét szituációban értelmezhető. Lássunk például néhány kifejezést a p impulzusra:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{238}$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{239}$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \tag{240}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{n}\hbar\frac{\omega}{c}. \tag{241}$$

Itt a (238) kifejezés a klasszikus mechanikában adja meg a test mozgásmennyiségét, a (239) a relativitáselméletben, vagyis a relativisztikus mechanikában, a (240) az elektromágneses hullámtér egységnyi térfogatára, míg a (241) az elektromágneses sugárzás kvantumára, a fotonra vonatkozik.

Az egyes jelölések értelmezése: a (239)-ben m a test nyugalmi tömege, c a fénysebesség vákuumban, a (240)-ben szereplő **E** és **H** a hullám elektromos és mágneses térerőssége, a (241)-ben **n** a terjedés irányát mutató egységvektor, míg az ω annak a sugárzásnak a körfrekvenciája, amelyben az adott foton szerepel. Külön kiemeljük, hogy a $\hbar$ az egyik legáltalánosabb fizikai állandó ($\hbar = 10^{-34}$ Js), amelyet a mikrovilág jelenségeinek vizsgálatában (a kvantummechanikában) igen elterjedten alkalmaznak. Ez a Planck-állandó, 2π-ed része. Megcsodálhatjuk, mennyire különböző megjelenési alakja van a mozgásmennyiségnek.

Első diák: Közben én is megértettem, hogy a tömeg és a sebesség szorzata a mozgásmennyiség meghatározásának csupán egyedi esete.

Tanár: Így van. Ez az egyedi meghatározás mégis kiterjeszthető arra az esetre is, amelyet a (239) kifejezés jellemez, a következő matematikai függvény behelyettesítésével:

$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v}$,

ahol: $$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{242}$$

Láthatjuk, hogy nem kellett mást tennünk, mint figyelembe vennünk, hogy **a test tömege függ annak sebességétől.**

Második diák: Ha jól emlékszem, a relativitáselméletben ez éppen így szerepel.

Tanár: Valóban. Most pedig tessék kiterjeszteni a (238) kifejezést azokra az esetekre, amikor a tömeg és a sebesség értelmét veszti!

Második diák: De hiszen a foton sebessége megegyezik a vákuumban mért fénysebességgel!

Tanár: Ez igaz, viszont megjegyzem, hogy először a sebesség alatt olyan meghatározott kinematikai mennyiséget értek, amely változó lehet; másodszor pedig a foton nem rendelkezik nyugalmi tömeggel. Ily módon tehát sem a (238), sem pedig a (239) kifejezésben nem érvényes a foton mozgásmennyiségének meghatározására. Igaz, hogy más mikrorészecskék – pl. az elektron – rendelkeznek nyugalmi tömeggel, azonban ha szigorúan vesszük, akkor viszont ezek esetében a sebesség nem értelmezhető.

Első diák: Akkor miért beszélnek a különféle könyvekben (sőt a a mi beszélgetésünk során is előfordult) az „elektron sebességéről"?

Tanár: **A kvantummechanikában a „mikrorészecske sebessége" kifejezésnek ennek ellenére sincs szorosan vett értelme.**

A kifejezés használata tulajdonképpen nem jogos (ilyen értelemben az „elektron sebessége" helyett mindenütt az „elektron impulzusa osztva tömegével" kifejezést kellene használni). Ha a szabad elektron mozgását vizsgáljuk, akkor igen sok esetben úgy tekinthetjük azt, mint egy klasszikus részecskét, és ilyen értelemben beszélhetünk annak sebességéről. Ha azonban az elektron kötött állapotban található (pl. az atomi elektron), akkor az már nem tekinthető klasszikus részecskének, és a sebesség fogalma már egyáltalán nem alkalmazható vele kapcsolatban.

Második diák: Akkor a Bohr-féle atommodell esetén miért beszélünk mégis az „atomi elektronhéjon mozgó elektronok sebességéről"?

Tanár: Ez a modell az atomfizika kezdeti időszakában született. Mint később kiderítették, az atomok ilyen elektronhéjjal nem rendelkeznek, tehát nem beszélhetünk az elektron egyik vagy másik pályán való mozgási sebességéről sem. A pályán való mozgás a klasszikus fizika sajátos jellegzetessége. A kvantummechanikában viszont (attól az esettől eltekintve, amikor a mikrorészecske szabadon mozog) a „pálya" fogalma értelmét veszíti.

De ne menjünk túl messze a kvantummechanika területére, mert ez már egy egészen más témához tartozik.

Első diák: Azt mondhatjuk tehát, hogy az „elektron sebessége" abszurdum, ugyanakkor pedig „az elektron mozgásmennyisége" reális fizikai értelemmel bíró kifejezés?

Tanár: Pontosan így van.

A mikrovilágban a mozgás sajátosságai lényegesen eltérnek a klaszszikus mechanikában megszokott pályán történő elmozdulástól. Ezért nem szabad meglepődni azon, hogy a mikrovilágban érvényüket vesztik az olyan kifejezések, mint pl. a sebesség és a gyorsulás. Az impulzus viszont a tér homogenitásával, tehát egy olyan fundamentális tényezővel áll összefüggésben, amely mind a mikro-, mind a makrovilágban jelen van.

Második diák: Megértettem a magyarázatot, bár hozzá kell tennem, hogy én korábban az impulzust és a sebességet szinte rokon értelmű fogalmaknak képzeltem el.

Tanár: Ez egyébként egy igen elterjedt nézet, ami pszichológiai szempontból a (238) kifejezés egyszerűségével indokolható. Amint azonban meggyőződhettek róla, **a sebesség és az impulzus – egymástól teljesen eltérő fogalmak.** Most pedig a figyelmükbe ajánlanám a vizsgált három mennyiségre vonatkozó (és a klasszikus mechanikában értelmezhető) legegyszerűbb kifejezéseket:

$$E = \frac{1}{2}mv^2; \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}; \quad \mathbf{M} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \tag{243}$$

Ezek össze is vonhatók:

$$E = \frac{p^2}{2m}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{244}$$

Mit fejeznek ki ezek az egyenletek?

Második diák: Ez azt jelenti, hogy az energia és az impulzusmomentum kifejezhető az impulzus segítségével.

Tanár: És mi következik ebből?

Második diák: Ebből viszont az következik, hogy ha az impulzus nem változik, akkor mind az energiának, mind az impulzusmomentumnak változatlannak kell maradnia. Viszont akkor ezek a megmaradási törvények nem egymástól függetlenül léteznek! Teljesen értelmetlen dolgot kapunk: az idő homogenitása a tér homogenitásának következménye?!?

Tanár: Ugye magától is rájött, hogy zsákutcába jutott? Ugyanazt a hibát követte el, mint a felvételizők egy jelentős része: az energiamegmaradás és az impulzus megmaradásának törvényét nem hajlandók egymástól függetlenül, önállóként kezelni. Megfigyeltem, hogy az energiamegmaradás törvénye iránt még úgy-ahogy kellő tisztelettel viseltetnek, ugyanakkor az impulzusmegmaradás törvényének (nem is beszélve az impulzusmomentumról!) tudat alatt másodlagos, alárendelt jelentőséget tulajdonítanak.

Első diák: Lehetséges, hogy azért, mert az impulzus megmaradásának törvényét Newton törvényeiből vezetjük le?

Tanár: Elképzelhető. Közben megfeledkeznek arról, hogy Newton törvényei a klasszikus mechanikára érvényesek, de a mikrovilágra már nem.

Második diák: Végül is hogyan értelmezhetjük a (244) egyenleteket?

Tanár: Mindenekelőtt azt jegyzem meg, hogy a (244) kifejezésből egyáltalán nem szabad olyan következtetésre jutni, mintha az energiamegmaradás az impulzus megmaradásának lenne a következménye. Vizsgáljuk csak meg a legegyszerűbb példát: két azonos tömegű test rugalmas ütközését! Az impulzus megmaradása a $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ vektorok megmaradását, az energiamegmaradás viszont az $E_1 + E_2$ vagy a $p_1^2 + p_2^2$ összegek állandó értékét jelenti. Könnyen belátható, hogy a $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ állandóságából még egyáltalán nem következik, hogy $p_1^2 + p_2^2$ értéke is állandó marad. Ezenkívül azt is figyelembe kell venni, hogy a (244) kifejezés csak korlátozott mértékben alkalmazható. Igaz, hogy alkalmazási területe kiterjeszthető a szabadon mozgó mikrorészecskére is, a kötött mikrorészecske esetén viszont elvi akadályokba ütközik. Ha pl. egy atomi elektront veszünk, ennek az energiája semmiféle összefüggésben nincs az adott elektron impulzusával. Igen fontos tehát, hogy állandóan tudatában legyünk: **az energiamegmaradás, az impulzus és az impulzusmomentum megmaradási törvénye mind egymástól független, önálló törvény.** Emlékeztetném Önöket, hogy egyszer erre már felhívtam a figyelmüket, amikor a 10. órán azt a nem centrális feladatot oldottuk meg, amelyben a golyó a lejtőnek ütközve fölfelé pattan.

Második diák: Én emlékszem. Akkor arra az érdekes következtetésre jutottunk, hogy az impulzus megmaradásának számításakor a Földet is figyelembe kell venni, míg az energiamegmaradásnál nem szükséges.

Tanár: Így van. Ezenkívül érdemes még visszaemlékeznünk a biliárd-

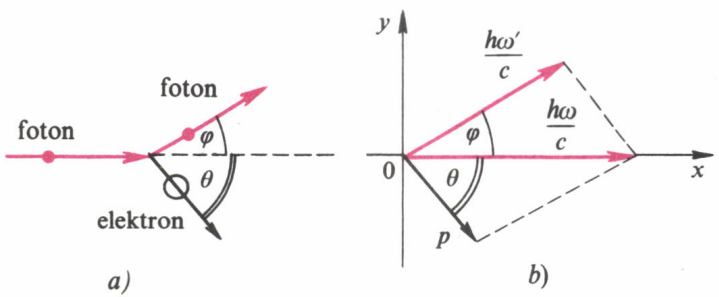
golyók rugalmas ütközésével kapcsolatos feladatokra is. Mi történik akkor, ha egy mozdulatlan golyóval egy ugyanolyan tömegű golyó ütközik? Az ütközés természetesen rugalmas.

Második diák: Ha az ütközés centrális, akkor az álló golyó mozgásba jön, a második golyó pedig leáll. Ha viszont az ütközés nem centrális, akkor a két golyó egymással 90°-ot bezáró irányban folytatja útját.

Tanár: Pontosan így van. A golyók ilyen viselkedése az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás együttes következménye. Ennek a két megmaradási törvénynek az ismerete a biliárdhoz elegendő elméleti felkészülést biztosít, a többi már a centrális és nem centrális ütközések kivitelezésének gyakorlati elsajátításán múlik. Most pedig egy teljesen másfajta „biliárdgolyós" feladatot nézzünk meg, éspedig az ún. Compton-effektust.

Első diák: Én még csak nem is hallottam ilyen effektusról.

Tanár: Ez az effektus pl. akkor jelentkezik, ha egy adott frekvenciájú röntgensugárnyaláb az anyag atomjaival (pontosabban az atomi elektronokkal) ütközve szóródik. A klasszikus elmélet szerint a szórt sugárzás frekvenciájának a beeső sugárzás frekvenciájával kell megegyeznie. A kísérlet azonban azt igazolta (és ebben rejlik a Compton-effektus lényege), hogy egyrészt a szórt röntgensugarak frekvenciája kisebb a beeső sugarak frekvenciájánál, másrészt pedig a frekvenciaeltolódás mértéke a sugárzás szóródási szögétől függ.



184. ábra

Tételezzük fel tehát, hogy egy sajátos biliárdgolyó-feladattal állunk szemben: a röntgensugárzást a foton-„golyók", míg az anyagot az elektron-„golyók" képviselik. A meghatározott ($\hbar\omega/c$) mozgásmennyiséggel rendelkező foton-„golyó" rugalmasan ütközik, a nyugalmi

állapotban levő elektron-„golyóval". Az ütközés következtében a foton eredeti irányához képest φ szögben „pattan" el, az új energiája $\hbar\omega'$, impulzusa pedig $\hbar\omega'/c$ lesz, az elektron viszont Θ szög alatt indul el $p^2/2m$ energiával és p impulzussal. Az ütközés mechanizmusát a 184. ábra szemlélteti. A kép hasonló ahhoz, amilyenekkel a klasszikus mechanikában a golyók rugalmas ütközése során találkoztunk.

Az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás törvénye alapján vizsgáljuk meg a mennyiségi összefüggéseket. A frekvenciaeltolódást jelölje: $\Delta\omega = \omega - \omega'$. Az energiamegmaradás a következő alakban írható fel:

$$\hbar\Delta\omega = p^2/2m. \tag{245}$$

Az impulzusmegmaradás egyenlete az x irányú vetületekre (184. *b)* ábra):

$$\frac{\hbar\omega}{c} - \frac{\hbar}{c}(\omega - \Delta\omega)\cos\Phi = p\cos\Theta, \tag{246}$$

$$\frac{\hbar}{c}(\omega - \Delta\omega)\sin\Phi = p\sin\Theta. \tag{247}$$

A (246) és (247) egyenleteket négyzetre emeljük, majd összegezzük:

$$(\omega - \Delta\omega)^2 + \omega^2 - 2\omega(\omega - \Delta\omega)\cos\Phi = p^2c^2\hbar^2.$$

Helyettesítsük be ide a (245) kifejezést, majd az egyenlet mindkét oldalát osszuk el ω^2-vel:

$$1 - \cos\varphi + \frac{\Delta\omega}{\omega}(\cos\varphi - 1) + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 = \frac{mc^2}{\hbar\omega}\cdot\frac{\Delta\omega}{\omega}.$$

Az igen kis értékű $(\Delta\omega/\omega)^2$ tag elhanyagolásával a következő kifejezést kapjuk:

$$\Delta\omega = 2\frac{\hbar\omega^2}{mc^2}\left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

illetve:

$$\frac{c\Delta\omega}{\omega(\omega-\Delta\omega)} = 2\frac{\hbar}{mc}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Behelyettesítve ebbe az egyenletbe az ω körfrekvencia és a λ hullámhossz közötti átlagos összefüggést ($\omega = 2\pi c/\lambda$), a szórt és a beeső sugarak hullámhossz-eltolódására a következő kifejezést kapjuk:

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi\hbar}{mc}\sin^2\frac{\varphi}{2}. \tag{248}$$

Ha a szóródási szög 90°, akkor $\Delta\lambda = 2\pi\hbar/mc = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ m. Rendkívül érdekes, hogy ez az eredmény tökéletesen egybeesik a kísérletileg mért értékkel.

Első diák: Én nem gondoltam volna, hogy a klasszikus mechanikából ismert megmaradási törvények ilyen eredményesen alkalmazhatók legyenek az atomfizikai feladatok megoldása során. Ha jól értettem, akkor a fenti esetben a megmaradási törvényeken kívül másra nem támaszkodtunk?

Tanár: Gyakorlatilag nem, ha eltekintünk attól az eljárástól, ahogyan a foton-„golyók" és az elektron-„golyók" energiáját és impulzusát fejeztük ki.

Első diák: Úgy tűnik, hogy a megmaradási törvények mindenhatók.

Második diák: Engem viszont aggaszt valami. Az elektronok és a fotonok egyáltalán nem tekinthetők biliárdgolyóknak, tehát rájuk nem érvényesek a klasszikus mechanika törvényei. Ezért itt valami turpisságnak kell lennie.

Tanár: Lássuk hát! Tisztázzuk mindenekelőtt azt, hogy utalása a klasszikus mechanika törvényeire nem helyénvaló, mivel azokat mi itt nem is alkalmaztuk. Mindössze a megmaradási törvényeket alkalmaztuk, ezek érvényessége pedig a klasszikus mechanika keretein messze túl terjed.

Második diák: Ez így van. Nekem mégis törvényellenesnek tűnik a billiárdgolyó-modell alkalmazása az elektronokra és fotonokra (amelyek még nyugalmi tömeggel sem rendelkeznek).

Tanár: Igen, a modell! Valóban, ez egy teljesen önkényes modell a mikrorészecskékre vonatkoztatva. Jelen esetben mégis teljesen megbízhatónak bizonyult. Miért? Egyszerűen azért, mert a feladatban nagyon is kevésre voltunk kíváncsiak. Mindössze azt akartuk meg-

tudni, hogyan változik a sugárzás hullámhossza egy bizonyos szög alatt végbemenő szóródáskor. Az erre a kérdésre adandó válaszhoz nem szükséges ismernünk az ütköző részecskék kölcsönhatási „mechanizmusát". Ha pl. azt akartuk volna megtudni, mi a valószínűsége annak, hogy a foton egy adott φ szögben szóródik, akkor már feltétlenül figyelembe kellett volna vennünk a foton-elektron kölcsönhatás jellemző vonásait és a mikrorészecskék tényleges fizikai természetét. Ebben az esetben nem bizonyult volna elegendőnek csak a megmaradási törvények alkalmazása.

Első diák: Most már bizonyára megértette, hogy túlzás lenne a megmaradási törvények „mindenhatóságáról" beszélni. A megmaradási törvények segítségével természetesen sok mindenre magyarázat adható, de nem mindenhatóak. Persze azért annál nagyobb hasznuk is van, minthogy magyarázattal szolgálnak számos jelenségre. Vegyék csak sorra az eddig elmondottakat, és próbálják megfejteni kérem, miért is olyan értékesek ezek a megmaradási törvények?

Első diák: Azért, mert egyes kérdésekre kimerítő választ nyújtanak.

Tanár: Nem erről van szó. Emlékezzenek vissza, hogyan kapjuk ezeket a válaszokat! Emlékezzenek az elektron és foton biliárdgolyó modelljére!

Második diák: Azt hiszem, hogy én már értem a lényegét. Arról van szó, szó, hogy a megmaradási törvények alkalmazása esetén a fizikai rendszer specifikus vonásai jelentéktelenné törpülnek. Innen adódik az önkényes modellezés lehetősége.

Tanár: Ez a lényeg. Ezért a beszélgetésünket egy kis filozófiai kitérővel szeretném lezárni. Minden jelenség magán viseli az általános és a sajátos vonásokat is. A jelenség általános vonásait a tér, az idő, sőt az adott jelenség szimmetriatulajdonságai határozzák meg. Ugyanakkor a sajátos vonásokat a jelenség individualitása, mondhatnánk „aszimmetriája" szabja meg. A jelenség általános vonásainak vizsgálatához elegendő a megmaradási törvények ismerete, míg a sajátos vonásokat csak úgy tudjuk vizsgálni, ha az adott jelenségről konkrét információval rendelkezünk, tehát ebben az esetben a megmaradási törvényeknél tovább kell mennünk. Világos, hogy minden jelenség vizsgálatakor előbb ki kell derítenünk azokat a vonásokat, amelyeket a megmaradási törvények segítségével lehetséges értelmezni, és csak utána szabad továbbmenni. Ezért mondjuk, hogy a megmaradási törvények fundamentális jellegűek.

Első diák: A beszélgetés elején említettük az elektromos töltés megma-

radásának törvényét is. A szimmetria mely tulajdonságával kapcsolatos ez a törvény?

Második diák: Tényleg Tanár Úr, erről még nem tetszett beszélni. Sőt, én még olyat is hallottam, hogy az elemi részecskék tárgyalása során jóval több megmaradási törvény is érvényesül.

Tanár: A beszélgetés során tudatosan nem akartam belemenni az elemi részecskék tárgyalásába. De ha már szóba került, szeretnék rámutatni a megmaradási törvényeknek még egy további jellegzetességére. Ismeretes, hogy az elemi részecskék erősen eltérnek a klaszszikus értelemben vett testektől. Az elemi részecskékre jellemző pl., hogy ütközéskor kölcsönösen átalakulhatnak. A fizikusok már könyvtárnyi anyagot írtak tele az észlelt átalakulási reakciókkal. Példaként bemutatok néhány példát arra, hogy a foton (γ) a proton (p), illetve a neutron (n) az ütközés során milyen kölcsönös átalakulásokat szenvedhetnek:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma+\mathrm{p}\rightarrow \mathrm{n}+\pi^{+};\quad \gamma+\mathrm{p}\rightarrow \pi^{\circ};\quad \gamma+\mathrm{p}\rightarrow \mathrm{p}\rightarrow \mathrm{p}+\pi^{+}+\pi^{-};\\ \gamma+\mathrm{n}\rightarrow \mathrm{p}+\pi^{-};\quad \gamma+\mathrm{n}\rightarrow \mathrm{n}+\pi^{\circ};\quad \gamma+\mathrm{n}\rightarrow \mathrm{n}+\pi^{+}+\pi^{-}, \end{array}\right\} \quad (249)$$

ahol: π^{+}, π^{-} és π° a pozitív, negatív, illetve semleges töltésű π-mezonokat jelölik. A következő átalakulási reakció is végbemehet:

$$\gamma+\mathrm{p}\rightarrow \mathrm{p}+\mathrm{p}+\tilde{\mathrm{p}}, \quad (250)$$

ahol: $\tilde{\mathrm{p}}$ – az antiprotont jelöli. Úgy gondolom, hogy az antianyagokról már hallottak.

Második diák: De hogy jönnek ide a megmaradási törvények?

Tanár: Az a helyzet, hogy miután a fizikusok könyvtári anyagot gyűjtöttek össze az észlelt reakciókról, és egybevetették azt azokkal a reakciókkal, amelyeket még senkinek sem sikerült észlelnie, egy sor törvényszerűségre jöttek rá. Például arra, hogy a nukleonok, (azaz a protonok és neutronok) száma a különböző reakciókban változatlan marad. Az autinukleonok (antiproton és antineutron) felfedezésekor kiderült, hogy egyes reakciókban nukleonok is keletkeznek, de kizárólag csak az antinukleonokkal párban. És ekkor támadt az az ötlet, hogy az elemi részecskékhez egy bizonyos mennyiségi jellemzőt rendeljenek (ezt bariontöltésnek nevezték el). A fotonok, elektronok és mezonok bariontöltése nullával egyenlő, a nukleonoké egy, míg az antinukleonoké mínusz egy.

Ily módon a fenti törvényszerűséget a bariontöltés megmaradási törvényeként foghatjuk fel.

Második diák: Egy ilyen megmaradási törvény nem tűnik valami természetesnek!

Tanár: Tehát „mesterkéltnek"?

Második diák: Talán így is mondhatnánk.

Tanár: Ez a „mesterkélt" törvény ugyanakkor lehetővé teszi, hogy előre megjósoljuk pl. a következő reakciók tiltottságát:

$$\gamma + p \rightarrow n + p + \pi^{\circ}; \tag{251}$$

$$\gamma + p \rightarrow n + p + \pi^{+}. \tag{252}$$

Második diák: A megmaradási törvényeknek ez az új értelmezése szinte „tilalmi elv" tulajdonságot kölcsönöz azoknak.

Tanár: Valóban, a megmaradási törvényeket gyakran az egyes folyamatok tiltottságának kifejezéseként tekintjük.

Egyébként ez az értelmezés nem is annyira újkeletű! Maga az energiamegmaradás törvénye nem más, mint az első rendű *perpetuum mobile* tiltottságának kifejezője. A mozgásmennyiség megmaradásának törvényét viszont, ha úgy tetszik, tekinthetjük azon folyamat tiltottságának kifejezőjeként, hogy önmagunkat hajuknál fogva képesek legyünk fölemelni.

Egyébként a tiltott reakciók felsorolását a végtelenségig folytathatnánk. Megnyugtatásul csak annyit: ezek közül valóban soha senkinek nem sikerült egyetlen reakciót sem észlelnie. Láthatjuk tehát, hogy a bariontöltések megmaradási törvénye objektív törvény, amely bizonyos előrejelzéseket is lehetővé tesz.

Ugyanilyen szempontból kell vizsgálnunk az elektromos töltések megmaradási törvényét is. Figyeljék meg, hogy a (249) és (250) reakciókban a részecskék elektromos töltésének összege nem változik.

Első diák: Ez a törvény a (251) reakcióra is teljesül.

Tanár: Valóban, az mégis tiltott marad, mert az elektromos töltés megmaradásának teljesülése egyedül nem szünteti meg egy adott reakció tiltottságát.

A (251) reakció a bariontöltés megmaradási törvénye, míg a (252) reakció egyben az elektromos töltések megmaradási törvénye által is tiltottnak minősül.

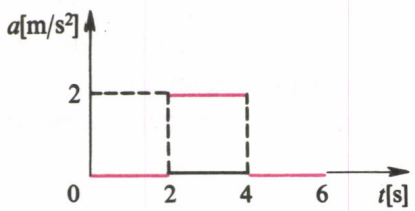
Második diák: És hogyan hozható összefüggésbe a megmaradási törvények ilyen értelmezése a szimmetria tulajdonságokkal?

Tanár: Ön most egyértelmű, határozott választ vár a kérdésére, pedig ilyen nem létezik. E helyett én három választ adok Önnek. Az első: a fizikára általában jellemző a jelenségek sokoldalú vizsgálata, a különböző nézőpontok egyeztetése, és ez alól a megmaradási törvények sem képeznek kivételt. A második: a szimmetria és a tilalmak létezése bizonyos értelemben logikai kapcsolatban áll egymással. Ha vesszük például a tér izotróp jellegét (azaz, hogy a tér az elfordulásokkal szemben szimmetrikus), akkor ez egyben azt is jelenti, hogy a térben nem létezhetnek fizikai értelemben vett kitüntetett irányok. A harmadik válaszom pedig: valóban elképzelhető, hogy az elektromos töltések és a bariontöltések megmaradási törvényei (vagy az elemi részecskefizika egyéb megmaradási törvényei) ténylegesen összefüggésben állnak a szimmetria bizonyos tulajdonságaival, amelyekről egyelőre nincsenek ismereteink.

Figyeljék meg kérem, hogy a bariontöltések összege az összes fenti reakcióban valóban állandó marad.

A FELADATOK MEGOLDÁSA

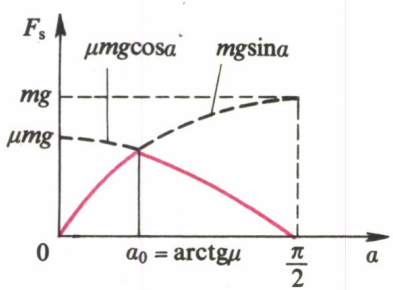
1. Lásd az 1. ábrán:
a) $v_{átl.} = 2$ m/s; *b)* $v_{átl.} = 2$ m/s; $0 \leqq \tau \leqq 2$ s, $\tau = 3$ s, $4\text{ s} \leqq \tau \leqq 6$ s.



1. ábra

2. $k = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \operatorname{tg} \alpha$.

3. Lásd a 2. ábrán!



2. ábra

4. 20 m, 1 s, 10,2 m/s, 10,6 m/s.

5. 11,3 m/s, $x = 4$ m, $y = 0{,}8$ m, $t = 0{,}5$ s, $v_A = 9{,}4$ m/s, $v_B = 15{,}2$ m/s.

6. 1. $t\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos(\alpha_1+\alpha_2)}$;

2. $t\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}$.

7. $T=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}+\sqrt{\frac{H+3h}{2g}}$;

$L=\frac{\sqrt{3}}{2}(H-h+\sqrt{H^2+2hH-3h^2})$.

8. $\alpha=\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{4}-\frac{F}{Mg}\right)$.

9. $\frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}$.

10. $v_0=\frac{L}{\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{g}{2(L\operatorname{tg}\alpha-H+h)}}\approx 13{,}8$ m/s.

11. $L=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha-l\approx 6$ m.

12. $h=H=19{,}6$ m; $s=3v_0\cdot\sqrt{\frac{2H}{g}}-l=20$ m.

13. $\frac{v^2\sin 2\alpha}{g\cos\beta}(1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha)\approx 40$ m, (itt $\alpha=45^\circ+\frac{\beta}{2}$ a kő eldobási szöge).

14. $v=\frac{F\cos\alpha-\mu(Mg-F\sin\alpha)}{M}t\approx 37{,}2$ m/s;

$W=\mu(Mg-F\sin\alpha)\frac{F\cos\alpha-\mu(Mg-F\sin\alpha)}{M}\cdot\frac{t^2}{g}\approx 1280$ J.

15. $a=\frac{F\cos\alpha-2\mu mg+\mu F\sin\alpha}{2m}\approx 2{,}6$ m/s^2,

$T=\frac{F}{2}(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)\approx 42$ N;

$F_1=\frac{2\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\approx 8{,}2$ N.

16. $a = g/3 \approx 3{,}3\ \mathrm{m/s^2}$, $T = \frac{2}{3}Mg \approx 13\ \mathrm{N}$.

17. $a = g\dfrac{m_3 - (m_2 + m_1)\sin\alpha}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 3{,}5\ \mathrm{m/s^2}$;

$$T_{3-2} = g\frac{m_3(m_1 + m_2)(1 + \sin\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 50{,}4\ \mathrm{N};$$

$$T_{2-1} = g\frac{m_1 m_3(1 + \sin\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 33{,}6\ \mathrm{N}.$$

18. $a = g\dfrac{M_3 + M_4 + M_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \mu M_1}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} \approx 6{,}9\ \mathrm{m/s^2}$

(itt α a középső síknak a vízszintessel bezárt szöge);

$$T_{1-2} = g\frac{M_1(M_3 + M_4)(1 + \mu) + M_2 M_1(\sin\alpha + \mu - \mu\cos\alpha)}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} \approx$$
$$\approx 8{,}8\ \mathrm{N};$$

$$T_{2-3} = g\frac{(M_3 + M_4)[M_1(\mu + 1) + M_2(1 - \sin\alpha + \mu\cos\alpha)]}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} \approx 16{,}2\ \mathrm{N};$$

$$f = gM_4\frac{M_2(1 - \sin\alpha + \mu\cos\alpha) + M_1(1 + \mu)}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} = 1{,}5\ \mathrm{N}.$$

19. $a = \dfrac{g}{2}[(\sin\alpha - \sin\beta) - \mu(\cos\alpha + \cos\beta)]$;

$$T = \frac{1}{2}mg(\sin\alpha + \sin\beta + \mu\cos\beta - \mu\cos\alpha);$$

$$\mu_1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

20. A rúd nyugalmi helyzetben van; $F_s = mg\sin\alpha - F = 4{,}9\ \mathrm{N}$ és a lejtő mentén fölfelé mutat.

21. $F_1 = F\left(\frac{2g\sin\alpha}{a} - 1\right) \approx 120$ N.

22. *a)* $g\frac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{1+\mu\operatorname{tg}\alpha}$; *b)* $g\frac{\mu+\operatorname{tg}\alpha}{1-\mu\operatorname{tg}\alpha}$.

23. $F = g(M_1+M_2)(\mu_2-\mu_1)$.

24. $T_1/T_2 = \cos\alpha_2/\cos\alpha_1 = \sqrt{2/3}$; $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{\cos\alpha_2/\cos\alpha_1} = \sqrt[4]{2/3}$.

25. $T = 3Mg\cos\alpha$; $a_c = 2g\cos\alpha$; $a_\tau = g\sin\alpha$;
$a = g\sqrt{3\cos^2\alpha+1}$.

26. $\frac{gR-v^2}{gR+v^2} = 0{,}43$.

27. $(R+2H):(2H-R):(2H-5R) = 7:4:1$.

28. $H = \frac{5}{2}R = 75$ cm.

29. $F_A = Mg\left(1-\frac{v^2}{gR}\right)$, $F_c = Mg\left(1+\frac{v^2}{gR}\right)$; a B pontban ható F_B erő értéke ugrásszerűen változik. Ha a B ponthoz balról közelítünk, akkor $Mg(\cos\alpha - v^2/gR)$ értékű, míg jobbról közelítve $Mg(\cos\alpha + v^2/gR)$ értékű lesz.

30. $v_0 = \sqrt{gl(n-5)} = \sqrt{5gl}$.

31. $h = R\left(1-\frac{g}{\omega^2 R}\right)$; $F = m\omega^2 R$.

32. $h = \frac{25}{27}l$ az egyensúlyi ponttól.

33. $T = mln^2 = 3{,}6$ N.

34. $l \approx 1{,}5\,R$ (a megoldáskor vegyük figyelembe az 5. órán elmondottakat!).

35. $\varrho = 81\pi/8\gamma T^2$.

36. $T = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 1$ ó 25 perc.

37. $\varrho = 3\pi/T^2\gamma \approx 110\ \mathrm{kg/m^3}$.

38. $\dfrac{v_1}{v_2} = \sqrt{\dfrac{R+h_2}{R+h_1}}$; $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{R+h_1}{R+h_2}\right)^{3/2}$.

39. $v_1 = \sqrt{\gamma \dfrac{M_F}{R_F}} \approx 8\ \mathrm{km/s}$.

40. $W = -m\dfrac{v_0+v}{2}(v-v_0-gt) = 3900\ \mathrm{J}$.

41. $\mu = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \approx 0{,}27$.

42. *a)* $\dfrac{v_1}{v_2} = 1$; *b)* $\dfrac{v_1}{v_2} = \sqrt{\dfrac{1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1}{1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha_2}}$.

43. $v = v_0\sqrt{\dfrac{M}{M+m}} \approx 13{,}8\ \mathrm{m/s}$; $l = \dfrac{v_0^2 m^2}{2M(M+m)\mu g} \approx 0{,}37\ \mathrm{m}$.

44. $F = mg\left(\dfrac{H}{h}+1\right) - V\varrho_v g$; $h_1 = 2h\left(\dfrac{V\varrho_v}{m}-1\right) - H$, ($\varrho_v$ a víz sűrűsége).

45. $v = v_0\dfrac{M_1}{M_1+M_2} = 7{,}5\ \mathrm{km/ó}$; $l = \dfrac{v_0^2}{2g(n/100)}\left(\dfrac{M_1}{M_1+M_2}\right)^2 =$

$= 4{,}65\ \mathrm{m}$.

46. $H = \dfrac{v_0^2}{2g}\left(\dfrac{m}{M}\right)^2 \dfrac{\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}$.

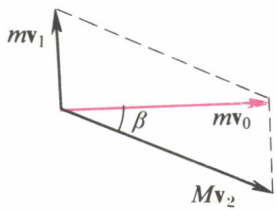
47. *a)* $F = M_1 g\left(1+\dfrac{4HM_2^2}{h(M_1+M_2)^2}\right) \approx 89$ kN;

b) $F = (M_1+M_2)g\left(1+\dfrac{HM_2^2}{h(M_1+M_2)^2}\right) \approx 92$ kN.

48. $v = v_0\dfrac{m_1}{m_1+m_2}$; *a)* $\dfrac{2}{3}v_0$, *b)* $\dfrac{1}{2}v_0$, *c)* $\dfrac{1}{3}v_0$;

$Q = \dfrac{m_1 v_0^2}{2}\left(1-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\right)$; *a)* $\dfrac{1}{6}Mv_0^2$, *b)* $\dfrac{1}{4}Mv_0^2$, *c)* $\dfrac{1}{3}Mv_0^2$.

49. Lásd a 3. ábrán!



3. ábra

$v_1 = v_0\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$; $v_2 = v_0\sqrt{\dfrac{2}{n^2+n}}$; $\beta = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{n}$;

$\Delta E = mv_0^2\dfrac{1}{n+1}$; $\Delta(mv) = mv_0\sqrt{\dfrac{2n}{n+1}}$, itt: $n = M/m$.

50. $s = l\dfrac{1+n}{n-3} = 9$ m.

51. 1. $h_1 = \dfrac{2}{9}H$; $h_2 = \dfrac{1}{18}H$; 2. $h = \dfrac{1}{18}H$,

ahol $H = 4l\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{v_0^2}{g}$.

52. $v = \dfrac{m+M}{m}\sqrt{5gl}$.

53. $h = H\dfrac{M-m}{M+m}$.

54. $h = \dfrac{HM}{4M+3m}$.

55. $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$.

56. $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{3-2\cos\alpha}{\cos\alpha} = 4$.

57. $v = g\alpha/\omega = 0{,}43$ m/s, (itt α radiánban van megadva).

58. $A = v_0\dfrac{m}{M+m}\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$.

59. $\dfrac{T_H}{T_F} = \dfrac{R_H}{R_F}\sqrt{\dfrac{M_F}{M_H}} \approx 2{,}4$.

60. $a = g\left[\left(\dfrac{T_0 N}{t}\right)^2 - 1\right] 17\ \text{m/s}^2$, $T_0 = 1$ s; a gyorsulás függőlegesen fölfelé irányul.

61. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{g^2+a^2}}} \approx 2\,\text{s}$.

62. $\mu \leq \operatorname{tg}\beta$.

63. $T_{BE} = T_{CE} = \dfrac{Mg}{2\sin\beta} \approx 98$ N; $T_{AB} = T_{CD} = \dfrac{(m+M)g}{2\sin\alpha} \approx 92$ N;

$F = \dfrac{g}{2}[M\operatorname{ctg}\beta - (M+m)\operatorname{ctg}\alpha] \approx 39$ N.

64. $T = mg\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $N = mg\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

65. $a = g\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1}\cdot\frac{1-\cos\alpha_2}{1-\cos\alpha_1}\right)-1 \approx 27{,}4\ \mathrm{m/s^2}$, a gyorsulás függőlegesen fölfelé irányul.

66. Az első helyzetben:

$$F_{BC} = mg\frac{\cos^2\beta}{\sin\alpha} = 1{,}25\ \mathrm{N}, \quad F_{AB} = mg\frac{\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = 0{,}6\ \mathrm{N};$$

a 2. helyzetben:

$$F_{BC} = 1{,}25\ \mathrm{N}; \quad F_{AB} = mg\left[\frac{\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}+\sin 2\beta\right] = 1{,}54\ \mathrm{N}$$

(itt $\cos\beta = 1-v^2/2gl = 0{,}8$).

67. $R_A = R_C = mgb/2a = 98\ \mathrm{N}; \quad T = g(m+M)/\cos\alpha = 396\ \mathrm{N}.$

68. $T_{BC} = mg\frac{1}{2(\sin\alpha+\cos\alpha)}; \quad R_A = \frac{mg}{2}\cdot\frac{1+4\cos^2\alpha+4\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

az R_A erő a függőlegessel $\beta = \operatorname{arcctg}(2+\operatorname{ctg}\alpha)$ szöget zár be.

69. $l_1 = l\frac{\mu}{1+\mu}.$

70. $Mg\sqrt[3]{\frac{M}{\varrho}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$

71. A lemez középpontjától jobbra $\frac{3}{22}R$ távolságra.

72. 1. A $2m$ tömegű csúcsból húzott magasságvonal felezőpontjában;

2. A $2m$ tömegű csúcsból húzott magasságvonalon, a csúcstól $7a\sqrt{3}/24$ távolságra.

73. $\varrho = \frac{G_2\varrho_1 - G_1\varrho_2}{G_2-G_1}.$

74. $\varrho_2 = \varrho_1\frac{G-G_2}{G-G_1}.$

75. $h = \frac{V}{S} \cdot \frac{(\varrho_0 - \varrho_v)\left(\frac{19}{20}\varrho_v - \varrho_j\right)}{\varrho_v(\varrho_0 - \varrho_j)} \approx 0{,}048 \frac{V}{S}$.

76. $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\varrho g s}}$.

77. $h_2 = \frac{(p_0 + \varrho g h_1)h_1}{p_0} = 0{,}11$ m; $m = \frac{(p_0 + \varrho g h_1)h_1 S \mu}{RT} =$

$= 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ kg;

itt és a továbbiakban: $T = (t + 273)$ °K, ϱ a higany sűrűsége.

78. A szint 3 cm-rel csökken; $m = \frac{(p_0 - \varrho g l_1)l_2 S \mu}{RT_1} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ kg.

79. $\Delta m = \frac{V\mu(p_1 - p_2)}{RT} \approx 0{,}059$ kg.

80. *a)* $W = \frac{p_0 V_1 (T_2 - T_1)}{T_1} = 138$ J;

b) $W = \frac{V_1\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)(T_2 - T_1)}{T_1} = 171$ J.

81. Megnő $\Delta l = \frac{l_1[T_1 \varrho g h(1 - \cos\alpha) - \Delta T(p_0 - \varrho g h)]}{T_1(p_0 - \varrho g h \cos\alpha)} \approx 0{,}01$ m-rel;

$m = \frac{(p_0 - \varrho g h)l_1 S \mu}{RT_1} = 2{,}1 \cdot 10^{-5}$ kg.

82. A higanycsepp a következő Δl értékekkel kerül közelebb a B ponthoz:

a) $\frac{V_1}{S} \cdot \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2T_1 + (\Delta T_1 - \Delta T_2)}$, *b)* $\frac{V_1}{S} \cdot \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2T_1 - (\Delta T_2 - \Delta T_1)}$,

c) $\frac{V_1}{S} \cdot \frac{\Delta T_1}{T_1}$.

83. Mindegyik csepp eltávolodik a B ponttól $\Delta l = \frac{2}{3} \cdot \frac{V_1 \Delta T}{S T_1}$ értékkel.

84. Mindegyik csepp jobbra tér ki $\Delta l = \frac{V_1}{S} \cdot \frac{\Delta T}{T_1}$ értékkel.

85. $m = \frac{V \eta D_1}{100} = 735$ g; nem képződik harmat, mivel $\frac{\eta D_1}{100} < D_2$;

$k = \frac{\mu p}{R T \eta D_1} = 0{,}58$. Itt $D_1 = 12{,}8$ g/m^3 a telített vízgőz sűrűsége 15 °C-on, $D_2 = 9{,}4$ g/m^3 pedig 10 °C-on.

86. $Q_{1\to7} : Q_{1\to8} : Q_{5\to2} : Q_{4\to2} =$

$= (p_1 V_1 - p_2 V_2) : (p_2 V_1 - p_1 V_1) : (p_2 V_2 - p_1 V_2) : (p_1 V_1 - p_2 V_2)$.

87. $Q_{1\to6} : Q_{3\to2} = 1 : 1$; $Q_{1\to5} : Q_{8\to2} = p_1 : p_2$.

88. Az O pontban *a)* nulla; *b)* $2{,}55 \cdot 10^{10}$ V/m (az iránya vízszintes és balról jobbra mutat); *c)* $2{,}55 \cdot 10^{10}$ V/m (az iránya függőlegesen lefelé mutat); *d)* nulla;

Az O_1 pontban *a)* és *b)* $6{,}45 \cdot 10^9$ V/m (az iránya vízszintes és balról jobbra mutat); *c)* $3{,}93 \cdot 10^{10}$ V/m (függőlegesen fölfelé irányul); *d)* $3{,}27 \cdot 10^{10}$ V/m (függőlegesen fölfelé irányul).

89. Az A, B és D pontokban nulla; a C pontban $-2 \cdot 10^{10}$ V; az E pontban $2 \cdot 10^{10}$ V.

90. $t = \sqrt{\dfrac{2dm}{eE}} = 3 \cdot 10^{-8}$ s; $v_0 = l\sqrt{\dfrac{eE}{2dm}} = 5 \cdot 10^6$ m/s.

91. $E = \dfrac{mv_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{el} = 147$ V/m.

92. $T = \dfrac{mg + Ee}{\cos \alpha}$; $W_K = \dfrac{(mg + Ee) l \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}$.

93. $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g + E(q_1 - q_2)}{m_1 + m_2}$; $T = \dfrac{2m_1 m_2 g + E(m_2 q_1 + m_1 q_2)}{m_1 + m_2}$.

94. $v = \sqrt{\dfrac{5(mg + Eq)l}{m}}$.

95. 1,83 q.

96. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l \cos \alpha} - \dfrac{q^2}{ml^3 \sin^3 \alpha}}$; $T = \dfrac{mg}{\cos \alpha}$.

97. $v = \sqrt{5gl - q^2/ml}$.

98. 0,2 A.

99. 1 A.

100. *a)* $I = 0$. $U = E$; *b)* $I = \dfrac{E}{r}$, $U = E - Ir = 0$.

101. $R_x = R_g - \dfrac{R_g R_s}{R_g + R_s} \approx 0{,}16\ \Omega$.

102. $U = E\left(1 - \dfrac{r}{r + R_V}\right) \approx 9{,}9$ V; $f = \dfrac{r}{r + R_V} \cdot 100\% \approx 1\%$.

103. $I = \dfrac{E}{r + R + R_I} \approx 0{,}196$ A, $f = \dfrac{R_I}{r + R + R_I} \cdot 100\% \approx 1{,}96\%$.

104. $C = \dfrac{12C_1C_2+4C_2^2+3C_1^2}{10C_2+3C_1} = 3\dfrac{17}{23}\mu\text{F}.$

105. $Q = \dfrac{ER_2C}{2(r+R_2)} = 6\ \mu\text{C}.$

106. $Q = \dfrac{ECR_1R_2}{R_1r+2R_2r+2R_1R_2}.$

107. $R = \dfrac{rdmv_0^2\ \text{tg}\,\alpha}{Eel-dmv_0^2\ \text{tg}\,\alpha}.$

108. $R_2 = 8\ \Omega.$

109. $\text{arctg}\dfrac{3Eel}{v_0^2md}.$

110. $U = \dfrac{ER}{3r+R} \approx 3{,}75\ \text{V}; \quad I = \dfrac{3E}{3r+R} \approx 0{,}25\ \text{A}.$

111. $\dfrac{2}{3}R.$

112. $\dfrac{4}{5}R.$

113. $\dfrac{3}{4}R.$

114. $\dfrac{11}{20}R.$

115. $R = \dfrac{5r\eta}{3(1-\eta)} = 60\ \Omega; \quad N = \dfrac{E^2\eta(1-\eta)}{r} = 70\ \text{W}$

(itt $\eta = 0{,}5$).

116. $\frac{n+k+n\cdot k}{n(k+1)} = 1{,}4$-szeres értékkel csökken.

117. $r = \frac{R}{8}$, $\eta_1 \approx 89\%$, $\eta_2 \approx 83\%$.

118. 800 g.

119. 100 g gőz képződik; $t_3 \approx 21$ perc.

120. *a)* $B=0$. *b)* $B = \mu_0 \frac{2I}{\pi d}$.

121. *a)* $B = \mu_0 \frac{3I}{4R}$; *b)* $B = \mu_0 \frac{I}{4R}$; *c)* $B = \mu_0 \frac{I\sqrt{5}}{2R}$.

122. $h = \frac{d_1 + d_2 n_1}{n_1 \cdot n_2} \approx 10{,}8$ cm.

123. $L = \frac{2H-h}{\sqrt{n^2-1}} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$, itt $\sin\alpha = \frac{1}{n}$

124. $\alpha = \operatorname{arctg} n = 56°$; $x = d\frac{n^2-1}{n}\cos\alpha = 2{,}3$ cm.

125. $\frac{d}{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.

126. Szórólencse; $t = (1-N_1)f = 15$ cm; a kép a lencsétől távolabb kerül:

$$\Delta k = \frac{f^2 l}{(t+f)(t+l+f)} = 6 \text{ cm};$$

$$N_2 = \frac{\Delta k}{l+(1-N_1)f} = 0{,}4.$$

127. $k = \dfrac{Rt}{2t-R} = -37{,}5$ cm (virtuális kép);

$k_1 = \dfrac{R(t+l)}{2(t+l)-R} = 150$ cm (valós kép).

128. $k_2 = \dfrac{5E}{2} = 100$ cm.

129. A középső lencse helyén.

130. $k = \dfrac{dR}{2nd-R} = 100$ cm; $N = \dfrac{R}{2nd-R} = 4.$

131. $k = -\dfrac{dR}{2nd+R} = -6{,}25$ cm; $N = \dfrac{R}{2nd+R} = 0{,}625.$

Megjelent a Gondolat Könyvkiadó (Budapest)
és a MIR Könyvkiadó (Moszkva) közös gondozásában
Felelős kiadó a Gondolat Könyvkiadó igazgatója
Felelős szerkesztő: FEHÉR GYÖRGY
Műszaki vezető: KÁLMÁN EMIL
Műszaki szerkesztő: HODU PÁLNÉ
Szedte a Nyomdaipari Fényszedő Üzem
A kötésterv HORVÁTH MÁRIA munkája
Nyomták a Szovjetunióban
Megjelent 20 000 példányban
22 (A/5) ív terjedelemben

FIZIKA 1975, FIZIKA 1976, FIZIKA 1977

A modern fizikai kutatások szerepét tudakoló kérdésre a legtöbbünk – kevés töprengés után – három lényeges sajátságot is megjelölne: az új, szinte határtalan területek kitárulkozását, a gondolkozásmód alapjaiban való alakulását és a technikai alkalmazások minden képzeletet felülmúló lehetőségeit. És példaként megidéznénk Max Planck kvantumhipotézisét, Albert Einstein relativitáselméletét, Enrico Fermi atommáglyáját. De ha a kérdés a mai kutatásokra vonatkozna, már nehezebb lenne ilyen gyors és biztos választ adni. Mert a jelentős eredmények tárháza csaknem zavarbaejtő gazdagsággal áll előttünk. Lassan már hétköznapi eszközeink működése is csak az alkalmazott fizika ismeretében érthető meg, híreink pedig nap mint nap újabb tudományos szenzációkról számolnak be. Miként csatlakoznak azonban a nagyobb feltűnést keltő eredmények a fizikai kutatások főbb vonalaihoz? Mely területeken jutottunk előbbre az elmúlt évek során? Mik a kutatók célkitűzései, lehetőségei, módszerei? Hogyan lehetséges egységes képpé rendezni az elszigetelt híradásokat?
A „Fizika 1975" megjelentetésével útjára indított évkönyvsorozat az e kérdésekre adandó válaszokhoz kalauzolja az olvasót. A bevezető jellegű cikkek egy-egy szakterület leglényegesebb összefüggéseit világítják meg. Figyelmünk a fizika teljes egészére irányul, még akkor is, ha alkalmanként a hazai kutatások eredményeinek ismertetése kerül előtérbe.

FIZIKA 1975

Beköszöntő
A szerkesztő előszava
1. A neutrinotömeg a kozmológiában
(Szalay A. Sándor)
2. Lézerek és a modern spektroszkópia
(Bakos József)
3. A holográfia alkalmazása a számítástechnikában
(Kroó Norbert és Rónaky József)
4. Kritikus jelenségek
(Kondor Imre és Szépfalusy Péter)
5. A földi gravitációs tér meghatározása a mesterséges holdak mozgásából
(Ill Márton)
6. Kozmikus és földi „időjárás"
(Bencze Pál)
7. A magnetoszféra és a pulzációk
(Verő József)
8. Csillagközi rádióüzenetek jelfeldolgozási kérdései (Cyclops-terv)
(Csákány Antal)
9. Beszélő képek
(Horváth András)
10. Merre tart a fizika?
(Berényi Dénes)

FIZIKA 1976

1. Fizika és társadalom
   (Pál Lénárd)
2. Részecskeemisszió lézerfény hatására
   (Farkas Győző és Horváth Zoltán György)
3. A Mössbauer-effektus és alkalmazásai
   (Korecz László)
4. Tárológyűrűk és ütközősugarak alkalmazása a részecskefizikában
   (Pócsik György)
5. Napjaink Rutherford-kísérlete
   (Gálfi László)
6. A holdkőzetek ásványkőzettani vizsgálatainak eredményéről
   (Kőháti Attila)
7. Nemlineáris hullámok és rezgések
   (Ferdinand Čap)
8. A termolumineszcencia és a régészet
   (Félszerfalvi János)
9. Áramok, örvények, ciklonok, avagy az elektrodinamika és a hidrodinamika kapcsolatai
   (Tihanyi László)
10. A Nap, ahogyan eddig még nem láttuk
    (Edward G. Gibson)
11. Képek a Skylab napfelvételeiből
12. A Nap a Skylabról nézve
    (John Eddy)

FIZIKA 1977

1. Amit a plazmáról minden fizikusnak tudnia kell
(L. A. Arcimovics)
2. Neutroncsillagok
(D. Német Judit)
3. A Napból érkező neutrinókra várva
(Marx György)
4. A fizika variációs elvei
(Katona Zoltán)
5. Mágneses monopólusok?!
(Palla László)
6. A kvantumelektrodinamika kísérleti bizonyítékai
(Horváth Zalán)
7. A szupravezetés
(Papp Elemér)
8. A fémüvegek mechanikai tulajdonságai
(Kovács István)
9. Galileo Galilei pere
(J. M. Jauch)

T. I. T. KÖNYVTÁRA

vagy inkább naiv, de jó képességű diákjaiba oltani, amikor a viták során a józan ésszel logikusnak tűnő érvelésüket a fizika szempontjait figyelembe véve támasztja alá vagy utasítja el. Mindez – miként e könyv is mutatja – azt jelenti, hogy a sajátos megközelítési mód csak akkor mondható igazán fizikainak, ha a fizika minden lényeges fejezetében gyümölcsözően kamatoztatható. Végezetül egy tanács a „rendezőnek". A szerzők jobb híján nevezték szereplőiket tanárnak és diáknak. Valójában nem tanórákon vesszünk részt, hanem inkább baráti beszélgetéseken, amelyekben az idősebb barát kicsit többet tud mint társai. A rövidség kedvéért legyen ő a tanár, már csak azért is, mert ilyen az igazi tanár.

47,– Ft